СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛ. ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА „ТУРНИР ПРОФ. БОРИСЛАВ БОЯНОВ“

20 февруари 2011 г.

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

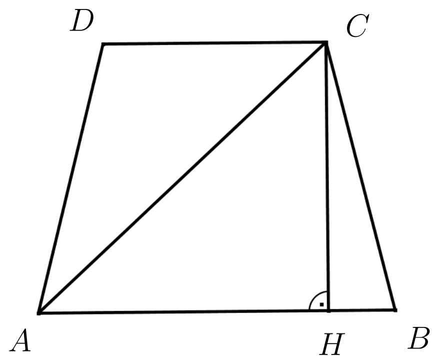
Зад. 1. *Да се реши уравнението*

$$|x-1|+|x+1|=2.$$

Решение. При $x \leq -1$ и $x \geq 1$ от уравнението получаваме съответно $x=-1$ и $x=1$, а при $-1 \leq x \leq 1$ то се превръща в тъждеството $2=2$. Следователно решенията са всички $x \in [-1,1]$.

Зад. 2. *В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) може да се впише окръжност, около него може да се опише окръжност и $AD=5$, $AC=7$. Да се намерят дължините на основите AB и CD.*

Решение. Имаме $AD=BC$ (понеже около трапеца може да се опише окръжност) и $AB+CD=AD+BC=10$ (понеже в него може да се впише окръжност). Нека $AB>CD$ и $CH \perp AB$. Тогава $AH=\dfrac{AB+CD}{2}=5$, $CH^2=AC^2-AH^2=24$ и $BH^2=BC^2-CH^2=1$, т.е. $BH=1$. Но $BH=\dfrac{AB-CD}{2}$ и оттук $AB-CD=2$, което заедно с $AB+CD=10$ дава $AB=6$, $CD=4$.



Зад. 3. *Да се реши неравенството*

$$\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x} \leq \sqrt{2x}.$$

Решение. Неравенството има смисъл при $x \in [0,2]$. Тогава то е равносилно с $\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)^2 \leq 2x$ или (след преобразуване) $\sqrt{4-x^2} \leq x-2$. Оттук следва $x-2 \geq 0$, т.е. $x \geq 2$ и предвид $x \in [0,2]$ единственото решение е $x=2$.

Зад. 4. *В триъгълника ABC радиусите на вписаната и на описаната окръжности са съответно $r=\sqrt{3}$ и $R=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$ и $\sphericalangle ACB=60^\circ$. Да се намерят дължините на страните на триъгълника.*

Решение. От синусовата теорема намираме $AB=2\dfrac{7\sqrt{3}}{3}\sin 60^\circ=7$. Ако $BC=a$, $AC=b$, от косинусовата теорема имаме $7^2=a^2+b^2-2ab\cos 60^\circ$ или

$$a^2+b^2-ab=49. \tag{1}$$

За лицето на триъгълника имаме $S = \dfrac{ab\sin 60^\circ}{2} = \dfrac{ab\sqrt{3}}{4}$ и $S = pr = \dfrac{a+b+7}{2}\sqrt{3}$. От тези равенства получаваме

$$ab = 2a + 2b + 14. \tag{2}$$

Накрая от системата уравнения (1) и (2) намираме $a = 5$, $b = 8$ или $a = 8$, $b = 5$.

Зад. 5. *Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението*

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = a$$

има единствен реален корен.

Решение. Уравнението има смисъл при $x > 0$. След полагането $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = t$, $t > 0$, то приема вида

$$t^2 - t - a = 0. \tag{1}$$

Условието на задачата е равносилно с това (1) да има единствен положителен корен. Нека корените на (1) са t_1 и t_2. Ако $D = 1 + 4a = 0$, т.е. $a = -\dfrac{1}{4}$, то $t_1 = t_2 = \dfrac{1}{2} > 0$ и условието е изпълнено. Ако $a = 0$, то $t_1 = 0$, $t_2 = 1 > 0$ и условието отново е изпълнено. При $a \neq -\dfrac{1}{4}, 0$ условието е равносилно с $t_1 t_2 < 0$ или $-a < 0$, т.е. $a > 0$ (откъдето следва и $D > 0$). Така търсените стойности на параметъра са $a = -\dfrac{1}{4}$ и $a \in [0, +\infty)$.

Зад. 6. *Квадратният тричлен $f(x) = x^2 + bx + c$ има реални корени, принадлежащи на интервала $[-1, 1]$. Да се докаже, че за всяко реално число $\alpha \geq 1$ са изпълнени неравенствата $(\alpha - 1)^2 \leq f(\alpha) \leq (\alpha + 1)^2$.*

Решение. Нека корените на $f(x)$ са x_1 и x_2. Имаме $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ и оттук $f(\alpha) = (\alpha - x_1)(\alpha - x_2)$. Като използваме, че $-1 \leq x_1 \leq 1$, $-1 \leq x_2 \leq 1$ и $\alpha \geq 1$, а оттук и $\alpha \geq x_1$, $\alpha \geq x_2$, получаваме

$$\alpha - x_1 \geq \alpha - 1 \geq 0, \qquad \alpha - x_2 \geq \alpha - 1 \geq 0 \tag{1}$$

и

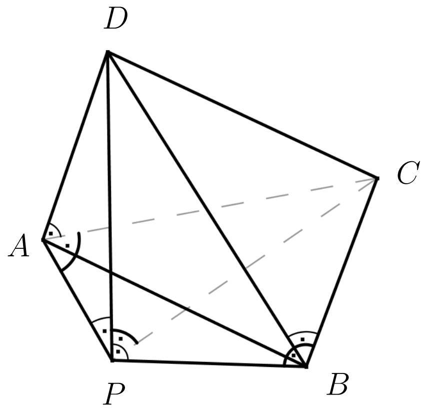
$$0 \leq \alpha - x_1 \leq \alpha + 1, \qquad 0 \leq \alpha - x_2 \leq \alpha + 1. \tag{2}$$

Почленното умножаване на двете неравенства (1) дава $(\alpha - x_1)(\alpha - x_2) \geq (\alpha - 1)^2$ и по същия начин двете неравенства (2) дават $(\alpha - x_1)(\alpha - x_2) \leq (\alpha + 1)^2$. Така $(\alpha - 1)^2 \leq f(\alpha) \leq (\alpha + 1)^2$.

Ще отбележим, че дадените неравенства могат да се докажат и като се използва, че условието на задачата е еквивалентно с

$$b^2 - 4ac \geq 0, \quad 1 - b + c \geq 0, \quad 1 + b + c \geq 0 \text{ и } -1 \leq -\frac{b}{2} \leq 1. \tag{*}$$

Зад. 7. *Основата на триъгълна пирамида $ABCD$ е равностранен триъгълник ABC, ортогоналната проекция на върха D върху основата лежи върху описаната около $\triangle ABC$ окръжност и две от околните стени сключват с основата ъгли с големина 60°. Да се пресметнат дължините на ръбовете на пирамидата, ако обемът ѝ е равен на $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$.*



Решение. Нека околните стени ACD и BCD сключват с основата ъгли с големина 60°. Нека k е описаната около $\triangle ABC$ окръжност и CP е диаметър на k. От това, че стените ACD и BCD сключват равни ъгли с основата следва, че ортогоналната проекция на върха D върху основата лежи върху ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$, т. е. лежи върху правата CP. Но по условие тази проекция лежи и върху k и следователно съвпада с точката C или с точката P. Ако ортогоналната проекция на D съвпада с C, следва $CD \perp ABC$, откъдето пък следва $ACD \perp ABC$ и $BCD \perp ABC$, противоречие. Следователно ортогоналната проекция на върха D върху основата е точката P. По-нататък, CP е диаметър на k и значи $\sphericalangle PAC = \sphericalangle PBC = 90^\circ$. Но отсечките PA и PB са ортогоналните проекции върху основата съответно на околните ръбове DA и DB и от теоремата за трите перпендикуляра следва $DA \perp AC$ и $DB \perp BC$. Така ъглите, които сключват околните стени DAC и DBC с основата, са съответно $\sphericalangle DAP = 60^\circ$ и $\sphericalangle DBP = 60^\circ$.

Да означим $AB = BC = CA = x$. Тогава $PA = PB = \dfrac{x\sqrt{3}}{3}$ и $PC = \dfrac{2x\sqrt{3}}{3}$. От правоъгълния $\triangle DPA$ (който е еднакъв с $\triangle DPB$) намираме $DP = x$ и $DA (= DB) = \dfrac{2x\sqrt{3}}{3}$. От правоъгълния $\triangle DPC$ пресмятаме $DC = x\sqrt{\dfrac{7}{3}}$.

По условие обемът на пирамидата $ABCD$ е $V = \dfrac{\sqrt{3}}{12}$, а от друга страна

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DP = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot x = \frac{x^3\sqrt{3}}{12}.$$

От тези две равенства намираме $x = 1$. Накрая, за ръбовете на дадената пирамида получаваме $AB = BC = CA = 1$, $DA = DB = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ и $DC = \sqrt{\dfrac{7}{3}}$.

Зад. 8. *Нека n е нечетно естествено число. Да се намерят всички реални решения на системата*

$$\left| \begin{aligned} x^n + y^n &= 1 \\ x^{n+2} + y^{n+2} &= xy \end{aligned} \right. .$$

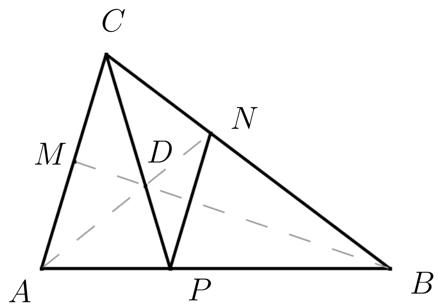
Решение. Като умножим първото уравнение с xy и го извадим от второто, получаваме $x^{n+2} + y^{n+2} - x^{n+1}y - xy^{n+1} = 0$, което е еквивалентно на $(x-y)(x^{n+1} - y^{n+1}) = 0$. Тъй като $n+1$ е четно, от последното уравнение получаваме $x = y$ или $x = -y$.

При $x = y$, от $x^n + y^n = 1$ получаваме $x = y = \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}$, което е решение и на второто уравнение, тъй като $\left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^{n+2} + \left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^{n+2} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{4}}$.

При $x = -y$, уравнението $x^n + y^n = 1$ няма решение.

Така, окончателно $x = y = \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}$.

Зад. 9. *В триъгълника ABC точката M е средата на AC, а точката N е вътрешна за страната BC. Правите BM и AN се пресичат в точка D. Правата CD пресича страната AB в точка P. Да се пресметне разликата* $\dfrac{AD}{DN} - \dfrac{AP}{PB}$.



Решение. От теоремата на Чева имаме $\dfrac{BN}{NC} \cdot \dfrac{CM}{MA} \cdot \dfrac{AP}{PB} = 1$, т. е. $\dfrac{BN}{NC} = \dfrac{PB}{PA}$. Следователно, по обратната теорема на Талес, $PN \parallel AC$. Прилагането на теоремата на Менелай за $\triangle ANC$ и правата BM ни дава $\dfrac{CM}{MA} \cdot \dfrac{AD}{DN} \cdot \dfrac{NB}{BC} = 1$, т. е. $\dfrac{AD}{DN} = \dfrac{BC}{NB}$. От $PN \parallel AC$ имаме $\dfrac{BC}{NB} = \dfrac{AB}{PB}$ и следователно $\dfrac{AD}{DN} = \dfrac{AB}{PB}$. Окончателно $\dfrac{AD}{DN} - \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AB}{PB} - \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{BP}{BP} = 1$.

Зад. 10. *Да се намерят всички стойности на x, за които числата* $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{12} - x\right)$, $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12}$ *и* $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{12} + x\right)$ *в някакъв ред образуват геометрична прогресия.*

Решение. Полагаме $y = \operatorname{tg} x$ и $a = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$, откъдето $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{12} - x\right) = \dfrac{a - y}{1 + ay}$ и $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{12} + x\right) = \dfrac{a + y}{1 - ay}$.

Три числа образуват геометрична прогресия точно тогава, когато квадратът на едно от тях е равен на произведението на другите две. Следователно, достатъчно е да разгледаме следните три случая:

I. $\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{12} - x\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{12} + x\right)$. Тогава

$$a^2 = \frac{a - y}{1 + ay} \cdot \frac{a + y}{1 - ay} = \frac{a^2 - y^2}{1 - a^2 y^2},$$

т. е. $(a^4 - 1)y^2 = 0$. Но $a^4 - 1 = 96 - 56\sqrt{3} \neq 0$ и следователно $y = \operatorname{tg} x = 0$, откъдето $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

II. $\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{12} - x\right) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12} \cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{12} + x\right)$. Тогава

$$\left(\frac{a - y}{1 + ay}\right)^2 = a \cdot \frac{a + y}{1 - ay}, \text{ т. е.}$$

$$(a - y)^2(1 - ay) = (a^2 + ay)(1 + ay)^2,$$

откъдето след разкриване на скобите и групиране получаваме

$$(a^2+1)y\big(ay^2+(a^2-1)y+3a\big)=0.$$

Следователно $y=0$ или $ay^2+(a^2-1)y+3a=0$.

Ако $y=0$, то $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

За дискриминантата на уравнението $ay^2+(a^2-1)y+3a=0$ имаме

$$D=(a^2-1)^2-12a^2=a^4-14a^2+1=0.$$

Тогава $y_1=y_2=-\dfrac{a^2-1}{2a}=\sqrt{3}$ и $x=\dfrac{\pi}{3}+l\pi$, $l\in\mathbb{Z}$.

III. $\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{12}+x\right)=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12}\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{12}-x\right)$, т. е. $\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{12}-(-x)\right)=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12}\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{12}+(-x)\right)$.
От решението на случай **II.** получаваме $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ и $x=-\dfrac{\pi}{3}+l\pi$, $l\in\mathbb{Z}$.

Окончателно, $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ и $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+l\pi$, $l\in\mathbb{Z}$.