СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛ. ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА „ТУРНИР ПРОФ. БОРИСЛАВ БОЯНОВ“

20 март 2011 г.

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

Зад. 1. *Нека за остроъгълния триъгълник ABC точката O е центърът на описаната около него окръжност, а точката H е ортоцентърът му и O е различна от H. Да се намери $\operatorname{tg}\sphericalangle ABC.\operatorname{tg}\sphericalangle BAC$, ако правата OH е успоредна на страната AB.*

Решение. Ще използваме стандартните означения за ъглите на триъгълника.

Нека C_1 е петата на височината от върха C, а M е средата на отсечката AB. От O — център на описаната окръжност имаме $AB = 2OM\operatorname{tg}\gamma$. От H — ортоцентър и ABC остроъгълен имаме

$$AB = AC_1 + C_1B = \operatorname{ctg}(90^\circ - \beta)HC_1 + \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)HC_1 =$$
$$= HC_1(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha) = HC_1\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = HC_1\frac{\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Следователно $2OM\operatorname{tg}\gamma = HC_1\dfrac{\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}$. Но $OH \parallel AB$, откъдето $OM = HC_1$. Следователно $2\cos\alpha\cos\beta = \cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta) = \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta$. Оттук $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 3$.

Зад. 2. *Нека n е естествено число. Да се намерят реалните корени на уравнението*

$$(x+1)(x+2)\dots(x+n) = n!.$$

Решение. Да означим $f(x) = (x+1)(x+2)\dots(x+n)$. Очевидно $x = 0$ е корен на уравнението за всяко n, а при $x > 0$ то няма корени, понеже $f(x) > n!$. Също така $x = -(n+1)$ е корен за четно n, а при $x < -(n+1)$ е изпълнено $|f(x)| > n(n-1)\dots1 = n!$ и уравнението няма корени. Нека $k = 0, 1, \dots, n-1$ или n и $-(k+1) < x < -k$. Тогава

$$|f(x)| < k(k-1)\dots1.1.2\dots(n-k) = k!(n-k)! = \frac{n!}{\binom{n}{k}} \le n!,$$

т. е. $|f(x)| < n!$ и уравнението няма корени. Очевидно $x = -1, -2, \dots, -n$ не са корени на уравнението.

Окончателно, реалните корени са $x = 0$ и $x = -(n+1)$, ако n е четно число и само $x = 0$, ако n е нечетно.

Зад. 3. *Нека p е просто число и $n > 1$ е естествено число, което дели $2^p - 1$. Да се докаже, че:*

а) p дели $\varphi(n)$, където $\varphi(n)$ е броят на естествените числа, по-малки от n и взаимно прости с n;

б) p дели $n - 1$.

Решение. Нека $m > 1$ е нечетно естествено число и δ_m е показателят на 2 по модул m. Тогава, ако $m \mid 2^p - 1$, то $\delta_m \mid p$ и тъй като p е просто, то $\delta_m = p$. От теоремата на Ойлер следва, че $p \mid \varphi(m)$.

а) Следва от горното при $m = n$.

б) Нека $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ е каноничното разлагане на n на прости множители. Тогава $\varphi(p_i) = p_i - 1$ и $p_i \mid 2^p - 1$ за $i = 1, 2, \dots, k$. Следователно $p \mid p_i - 1$ ($m = p_i$), т. е. $p_i \equiv 1 \pmod p$. Оттук $p_i^{\alpha_i} \equiv 1 \pmod p$ за $i = 1, 2, \dots, k$. Умножавайки тези сравнения, получаваме $n \equiv 1 \pmod p$. Окончателно $p \mid n - 1$.

Зад. 4. *Нека S_1 е лицето на правилен n-ъгълник, описан около окръжност с радиус 1, а S_2 — лицето на правилен m-ъгълник, вписан в окръжност с радиус 1. Да се намерят стойностите на n и m, ако $\dfrac{S_1}{S_2}$ е естествено число.*

Решение. Нека $k = \dfrac{S_1}{S_2}$ и тъй като $S_1 > S_2$, то $k > 1$. Пресмятаме $S_1 = n \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{n}$ и $S_2 = \dfrac{m}{2} \sin \dfrac{2\pi}{m}$. Тогава $k = \dfrac{\operatorname{tg} a}{a} \dfrac{b}{\sin b}$, където $a = \dfrac{\pi}{n}$, $b = \dfrac{2\pi}{m}$. От n, $m \geq 3$ следва, че $0 < a \leq \dfrac{\pi}{3}$ и $0 < b \leq \dfrac{2\pi}{3}$. Да означим $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ и $g(x) = \dfrac{x}{\sin x}$. Функциите $f(x)$ и $g(x)$ са монотонно растящи, съответно в интервалите $\left(0, \dfrac{\pi}{3}\right)$ и $\left(0, \dfrac{2\pi}{3}\right)$ $\left(\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)' = \dfrac{2x - \sin 2x}{2x^2 \cos^2 x} > 0 \text{ и } \left(\dfrac{x}{\sin x}\right)' = \dfrac{\cos x(\operatorname{tg} x - x)}{\sin^2 x} > 0\right)$.

Да забележим, че ако $n \geq 4$ и $m > 4$, то

$$1 < k = f\left(\frac{\pi}{n}\right) g\left(\frac{2\pi}{m}\right) < f\left(\frac{\pi}{4}\right) g\left(\frac{2\pi}{4}\right) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 2,$$

т. е. k не е естествено число. Следователно $n \leq 3$ или $m \leq 4$. Ще разгледаме два случая.

- $n \leq 3$, т. е. $n = 3$.
  - Ако $m > 6$, то $1 < k = f\left(\dfrac{\pi}{n}\right) g\left(\dfrac{2\pi}{m}\right) < f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) g\left(\dfrac{2\pi}{6}\right) = 2$ и следователно k не е естествено число.
  - Ако $m = 6$, то $k = 2$.
  - Ако $m = 5$, то $k = \dfrac{6\sqrt{3}}{5 \sin \frac{2\pi}{5}} \notin \mathbb{N}$

    $$\left(2 < \frac{6\sqrt{3}}{5} < \frac{6\sqrt{3}}{5 \sin \frac{2\pi}{5}} < \frac{6\sqrt{3}}{5 \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{12}{5} < 3\right).$$

  - Ако $m = 4$, то $k = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{N}$.
  - Ако $m = 3$, то $k = 4$.
- $n > 3$ и $m \leq 4$.

– $m=4$.

  * Ако $n>4$, то $1<k=f\left(\frac{\pi}{n}\right)g\left(\frac{2\pi}{m}\right)<f\left(\frac{\pi}{4}\right)g\left(\frac{2\pi}{4}\right)=2$ и следователно k не е естествено число.
  * Ако $n=4$, то $k=2$.

– $m=3$.

  * Ако $n\geq 6$, от $f\left(\frac{\pi}{n}\right)=f(a)=\frac{\operatorname{tg} a}{a}>1$ при $a\in(0,\frac{\pi}{2})$ получаваме
$$2<\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}=g\left(\frac{2\pi}{3}\right)<k=f\left(\frac{\pi}{n}\right)g\left(\frac{2\pi}{3}\right)\leq f\left(\frac{\pi}{6}\right)g\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{8}{3}<3.$$
Следователно k не е естествено число.
  * Ако $n=4$, то $k=\frac{16}{3\sqrt{3}}\notin\mathbb{N}$.
  * Ако $n=5$, то $k=\frac{20\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}}{3\sqrt{3}}$. Пресмятаме $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$, откъдето
$$k=\frac{20\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{3\sqrt{3}}\notin\mathbb{N}\ \left(2<\frac{20\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{3\sqrt{3}}<3\right).$$

Отговор: $m=n=3$, $m=n=4$ и $m=6$, $n=3$.

Зад. 5. *Нека $f(x)$ е ненулев полином с цели коефициенти от степен m, k е естествено число и $f(n)$ е точна k-та степен на цяло число за всяко естествено число n. Да се докаже, че:*
а) ако $m<k$, то $f(x)$ е константа;
б) ако $m=k$, то съществуват цели числа a и b, такива че $f(x)=(ax+b)^k$.

Решение. Нека $f(x)=px^m+qx^{m-1}+\cdots$, $p\neq 0$. Съществува число n_0, такова че за всяко $n>n_0$ $f(n)$ има постоянен знак. Без ограничение на общността можем да смятаме, че $p>0$ (ако k е четно, то $p>0$, а ако k е нечетно и $f(n)<0$ за $n>n_0$, то разглеждаме полинома $-f(x)=(-1)^kf(x)$, който удовлетворява условието на задачата). Да положим $y_n=\sqrt[k]{f(n)}\in\mathbb{Z}$ за $n\in\mathbb{N}$. Имаме, че
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^m}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(n+1)}{n^m}=p,\ \text{т. е.}\ \lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{n^{\frac{m}{k}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}}{n^{\frac{m}{k}}}=\sqrt[k]{p}$$
и
$$y_{n+1}^k-y_n^k=f(n+1)-f(n)=mpn^{m-1}+g(n),$$
където $g(x)$ е полином от степен ненадминаваща $m-2$.

Разглеждаме разликата
$$y_{n+1}-y_n=\frac{y_{n+1}^k-y_n^k}{y_{n+1}^{k-1}+y_{n+1}^{k-2}y_n+\cdots+y_{n+1}y_n^{k-2}+y_n^{k-1}}=$$
$$=\frac{n^{m-1}}{n^{\frac{m(k-1)}{k}}}\cdot\frac{\dfrac{y_{n+1}^k-y_n^k}{n^{m-1}}}{\left(\dfrac{y_{n+1}}{n^{\frac{m}{k}}}\right)^{k-1}+\left(\dfrac{y_{n+1}}{n^{\frac{m}{k}}}\right)^{k-2}\left(\dfrac{y_n}{n^{\frac{m}{k}}}\right)+\cdots+\left(\dfrac{y_{n+1}}{n^{\frac{m}{k}}}\right)\left(\dfrac{y_n}{n^{\frac{m}{k}}}\right)^{k-2}+\left(\dfrac{y_n}{n^{\frac{m}{k}}}\right)^{k-1}}.$$

Тъй като

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{y_{n+1}^k - y_n^k}{n^{m-1}}}{\left(\dfrac{y_{n+1}}{n^{\frac{m}{k}}}\right)^{k-1} + \left(\dfrac{y_{n+1}}{n^{\frac{m}{k}}}\right)^{k-2}\left(\dfrac{y_n}{n^{\frac{m}{k}}}\right) + \cdots + \left(\dfrac{y_{n+1}}{n^{\frac{m}{k}}}\right)\left(\dfrac{y_n}{n^{\frac{m}{k}}}\right)^{k-2} + \left(\dfrac{y_n}{n^{\frac{m}{k}}}\right)^{k-1}} =$$

$$= \frac{mp}{kp^{\frac{k-1}{k}}} = \frac{m}{k}\sqrt[k]{p},$$

в сила е

$$\lim_{n\to\infty}(y_{n+1}-y_n) = \frac{m}{k}\sqrt[k]{p}\lim_{n\to\infty}\frac{n^{m-1}}{n^{\frac{m(k-1)}{k}}} = \frac{m}{k}\sqrt[k]{p}\lim_{n\to\infty} n^{\frac{m-k}{k}} = \begin{cases} 0 & \text{ако } m < k \\ \dfrac{m}{k}\sqrt[k]{p} & \text{ако } m = k \\ \infty & \text{ако } m > k \end{cases}. \quad (1)$$

а) Тъй като $\{y_{n+1} - y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ е редица от цели числа, от (1) получаваме, че съществува естествено число n_1, такова че $y_{n_1} = y_{n_1+1} = y_{n_1+2} = \cdots$. Следователно $f(x)$ е константа (която е точна k-та степен на цяло число).

б) Тъй като $\{y_{n+1} - y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ е редица от цели числа, то границата ѝ е цяло число. От (1) получаваме, че $a = \sqrt[k]{p} = \lim\limits_{n\to\infty}(y_{n+1} - y_n)$ е естествено число. Тогава

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{n} = \sqrt[k]{p} = a \text{ и } y_n^k - pn^k = qn^{k-1} + h(n),$$

където $h(x)$ е полином от степен, ненадминаваща $k-2$.

Следователно

$$\lim_{n\to\infty}(y_n - an) = \lim_{n\to\infty}\frac{y_n^k - a^k n^k}{y_n^{k-1} + y_n^{k-2}(an) + \cdots + y_n(an)^{k-2} + (an)^{k-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^{k-1}\dfrac{y_n^k - pn^k}{n^{k-1}}}{n^{k-1}\left[\left(\dfrac{y_n}{n}\right)^{k-1} + \left(\dfrac{y_n}{n}\right)^{k-2}a + \cdots + \left(\dfrac{y_n}{n}\right)a^{k-2} + a^{k-1}\right]} = \frac{q}{ka^{k-1}}.$$

Тъй като $\{y_n - an\}_{n\in\mathbb{N}}$ е редица от цели числа, то границата ѝ е някакво цяло число b и съществува естествено число n_2, такова че $y_n - an = b \in \mathbb{Z}$ за всяко $n > n_2$. Следователно $f(n) = y_n^k = (an+b)^k$ за всяко $n > n_2$. Оттук $f(x) = (ax+b)^k$, тъй като двата полинома съвпадат за безбройно много стойности на x.