

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛ. ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА
„ТУРНИР ПРОФ. БОРИСЛАВ БОЯНОВ“
20 февруари 2011 г.

Зад. 1. Да се реши уравнението

$$|x - 1| + |x + 1| = 2.$$

Зад. 2. В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) може да се впише окръжност, около него може да се опише окръжност и $AD = 5$, $AC = 7$. Да се намерят дължините на основите AB и CD .

Зад. 3. Да се реши неравенството

$$\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} \leq \sqrt{2x}.$$

Зад. 4. В триъгълника ABC радиусите на вписаната и на описаната окръжности са съответно $r = \sqrt{3}$ и $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ и $\sphericalangle ACB = 60^\circ$. Да се намерят дължините на страните на триъгълника.

Зад. 5. Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които уравнението

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = a$$

има единствен реален корен.

Зад. 6. Квадратният тричлен $f(x) = x^2 + bx + c$ има реални корени, принадлежащи на интервала $[-1, 1]$. Да се докаже, че за всяко реално число $\alpha \geq 1$ са изпълнени неравенствата $(\alpha - 1)^2 \leq f(\alpha) \leq (\alpha + 1)^2$.

Зад. 7. Основата на триъгълна пирамида $ABCD$ е равностранен триъгълник ABC , ортогоналната проекция на върха D върху основата лежи върху описаната около $\triangle ABC$ окръжност и две от околните стени сключват с основата ъгли с големина 60° . Да се пресметнат дължините на ръбовете на пирамидата, ако обемът ѝ е равен на $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Зад. 8. Нека n е нечетно естествено число. Да се намерят всички реални решения на системата

$$\begin{cases} x^n + y^n = 1 \\ x^{n+2} + y^{n+2} = xy \end{cases}$$

Зад. 9. В триъгълника ABC точката M е средата на AC , а точката N е вътрешна за страната BC . Правите BM и AN се пресичат в точка D . Правата CD пресича страната AB в точка P . Да се пресметне разликата $\frac{AD}{DN} - \frac{AP}{PB}$.

Зад. 10. Да се намерят всички стойности на x , за които числата $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12} - x\right)$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$ и $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12} + x\right)$ в някакъв ред образуват геометрична прогресия.

Време за работа 5 часа.

Журито Ви желае успешна работа!