

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛ. ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА
„ТУРНИР ПРОФ. БОРИСЛАВ БОЯНОВ“
20 март 2011 г.

Зад. 1. Нека за остроъгълния триъгълник ABC точката O е центърът на описаната около него окръжност, а точката H е ортоцентърът му и O е различна от H . Да се намери $\operatorname{tg} \sphericalangle ABC \cdot \operatorname{tg} \sphericalangle BAC$, ако правата OH е успоредна на страната AB .

Зад. 2. Нека n е естествено число. Да се намерят реалните корени на уравнението

$$(x + 1)(x + 2) \dots (x + n) = n!.$$

Зад. 3. Нека p е просто число и $n > 1$ е естествено число, което дели $2^p - 1$. Да се докаже, че:

а) p дели $\varphi(n)$, където $\varphi(n)$ е броят на естествените числа, по-малки от n и взаимно прости с n ;

б) p дели $n - 1$.

Зад. 4. Нека S_1 е лицето на правилен n -ъгълник, описан около окръжност с радиус 1, а S_2 – лицето на правилен m -ъгълник, вписан в окръжност с радиус 1.

Да се намерят стойностите на n и m , ако $\frac{S_1}{S_2}$ е естествено число.

Зад. 5. Нека $f(x)$ е ненулев полином с цели коефициенти от степен m , k е естествено число и $f(n)$ е точна k -та степен на цяло число за всяко естествено число n . Да се докаже, че:

а) ако $m < k$, то $f(x)$ е константа;

б) ако $m = k$, то съществуват цели числа a и b , такива че $f(x) = (ax + b)^k$.

Всяка задача се оценява с 8 точки.

Време за работа 5 часа.

Журито Ви желае успешна работа!

Моля, прочетете внимателно!

1. Пишете четливо. Текст, който не се разчита, няма да бъде оценяван.
2. Изложете решението на всяка задача на отделен лист.
3. Изрично да се посочат листовите от беловата. Черновата не се оценява.
4. Условиата и решенията на задачите от втория кръг ще бъдат поместени на 20.03.2011 г. след 14 ч. на сайта на ФМИ и на <http://www.fmi.uni-sofia.bg/algebra/bojilov/turnir.html>
5. Резултатите от втория кръг на турнира ще бъдат обявени на 25.03.2011 г. на сайта на ФМИ и на <http://www.fmi.uni-sofia.bg/algebra/bojilov/turnir.html>
6. Победителят (победителите) в турнира ще бъдат наградени по време на празника на ФМИ по случай 24 май.
7. Ако имате въпроси, можете да питате на email: turnir@fmi.uni-sofia.bg