УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2018, Т. 160, кн. 4 ISSN 2541-7746 (Print)
С. ???–??? ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 510.5

ВЫЧИСЛИМАЯ ВЛОЖИМОСТЬ КЛАССОВ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТРУКТУР С ОТНОШЕНИЕМ КОНГРУЭНТНОСТИ

С. Ватев[1], *Х. Ганчев*[1], *И.Ш. Калимуллин*[2]

[1]*Софийский университет имени святого Климента Охридского, г. София, 1504, Болгария*

[2]*Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия*

Аннотация

В работе показано, что между вычислимой вложимостью классов алгебраических структур, основанной на операторах перечисления, и тьюринговой вложимостью имеется промежуточное понятие, основанное на использовании неинъективных представлениях алгебраических структур. Проблема эквивалентности этого понятия инъективной вычислимой вложимости связана с проблемой эффективной факторизации структуры с помощью оператора перечисления.

Ключевые слова: оператор перечисления, тьюринговый оператор, алгебраическая структура, атомная диаграмма

Введение

Вычислимые вложения классов алгебраических структур были введены и начали изучаться в работе Калверта, Камминса, Миллер и Найт [1] как алгоритмический аналог борелевских вложений. При этом было выделено два конкурирующих подхода к таким вложениям: строгие вложения $K_0 \leq_c K_1$ посредством операторов перечисления и слабые вложения $K_0 \leq_{tc} K_1$ посредством тьюринговых операторов (более подробно изученных в работе [2]). Первый подход кажется более естественным и правильным при исследовании вычислимых вложений, однако он оказался довольно трудным для изучения, из последних работ в этом направлении можно лишь выделить работу [3]. Второй же подход оказался достаточно гибким для формулировки и доказательства ряда интересных о вложении естественных классов алгебраических структур, см. работы [4–6].

В настоящей работе будут продолжены исследования [7] соотношений между этими двумя вариантами вычислимой вложимости. Всюду ниже подразумевается, что классы структур замкнуты относительно изоморфизма, а структуры имеют универсум, состоящий из натуральных чисел. Каждая структура, в свою очередь, идентифицируется со своей атомной диаграммой.

Определение 1 [1, 2]. Класс K_0 *вычислимо вложим* в класс K_1, обозначается $K_0 \leq_c K_1$, если существует оператор перечисления Γ со следующими свойствами:

A. Для всех $\mathcal{A} \in K_0$, $\Gamma(\mathcal{A})$ является структурой из K_1;

B. Для всех $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in K_0$ справедливо $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда $\Gamma(\mathcal{A}) \cong \Gamma(\mathcal{B})$.

При замене операторов перечисления на тьюринговые операторы мы получим понятие тюрингового вложения $K_0 \leq_{tc} K_1$ [1, 2], более слабого, чем вычислимая вложимость.

Предложение 1 (Гринберг, Калимуллин, см. также [2]). *Если $K_0 \leq_c K_1$, то $K_0 \leq_{tc} K_1$.*

Известно [7], что тьюринговая вложимость не эквивалентна вычислимой вычислимости. Например, класс линейных порядков $\{1, 2\}$ (линейных порядков из одного или двух элементов) тьюрингово вложим в класс линейных порядков $\{\omega, \omega^*\}$, но $\{1, 2\} \not\leq_c \{\omega, \omega^*\}$ в силу свойства монотонности операторов перечисления.

Предложение 2 (Свойства операторов перечисления). *Пусть Γ – оператор перечисления. Тогда*

A. (Монотонность). Из $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ следует $\Gamma(\mathcal{A}) \subseteq \Gamma(\mathcal{B})$.

B. (Непрерывность). Если R – атомное предложение или отрицание атомного предложения, то из $R \in \Gamma(\mathcal{A})$ следует существование конечной подструктуры $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ такой, что $R \in \Gamma(\mathcal{B})$ для любого $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{F}$.

Другой пример отличия двух видов вложимости можно получить из следующего предложения, доказанного в [7].

Предложение 3 [7]. *Существует класс K неориентированных конечных графов со следующими свойствами:*

A. Существует фридбергова вычислимая нумерация $\{\mathcal{X}_n\}_{n \in \omega}$ класса K такая, что каждый граф $\mathcal{X}_n$, $n \in \omega$, вложим в граф $\mathcal{X}_{n+1}$.

B. Не существует фридберговой нумерации $\{\mathcal{Y}_n\}_{n \in \omega}$ подкласса K такого, что $\mathcal{Y}_n \subseteq \mathcal{Y}_{n+1}$ для каждого n.

Первое утверждение предложения обеспечивает вложение $FLO \leq_{tc} K$, где $FLO = \{0, 1, 2, \dots\}$ – класс конечных линейных порядков. С другой стороны, из свойства монотонности операторов перечисления следует $FLO \not\leq_c K$.

В настоящей работе мы изучим промежуточную вложимость, допустив неинъективное представление структур в вычислимой вложимости. А именно, дадим следующее

Определение 2. A. Для структуры $\mathcal{A}$ пусть $\widetilde{\mathcal{A}}$ – структура с новым отношением конгруэнтности $\sim$ таким, что:

(a) класс конгруэнтности каждого элемента $\widetilde{\mathcal{A}}$ бесконечен;

(b) фактор-структура $\widetilde{\mathcal{A}}/\sim$ изоморфна $\mathcal{A}$.

B. Для класса K пусть $\widetilde{K} = \{\widetilde{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \in K\}$.

Тогда мы немедленно получим $K \leq_c \widetilde{K}$ и $\widetilde{K} \leq_{tc} K$. Нетрудно также заметить, что $\widetilde{\widetilde{K}} \leq_c \widetilde{K}$. Возникает вопрос, является ли обратимой первая импликация в последовательности импликаций

$$K_0 \leq_c K_1 \implies \widetilde{K}_0 \leq_c \widetilde{K}_1 \implies K_0 \leq_{tc} K_1.$$

(вторая импликация необратима, поскольку $\{\widetilde{1}, \widetilde{2}\} \not\leq_c \{\widetilde{\omega}, \widetilde{\omega}^*\}$ в силу того же свойства монотонности). Другими словами, всегда ли имеет место вложимость $\widetilde{K} \leq_c K$? В частности, существует ли оператор перечисления Γ такой, что $\Gamma(\mathcal{X}) \cong \mathcal{X}/\sim$ для различных структур $\mathcal{X}$, имеющих символ конгруэнтности $\sim$?

Ясно, что такой оператор должен существовать, если каждый тип изоморфизма в конечном классе K имеет определяющее его экзистенциальное предложение.

Отметим, что если K – класс конечных графов из предложения 3, то нетрудно видеть, что подклассы класса $\widetilde{K}$ также не обладают фридберговыми нумерациями $\{\widetilde{\mathcal{Y}}_n\}_{n\in\omega}$, для которых выполнено включение $\widetilde{\mathcal{Y}}_n \subseteq \widetilde{\mathcal{Y}}_{n+1}$. Поэтому для класса конечных линейных порядков FLO наряду с $FLO \not\leq_c K$ будет также иметь место $FLO \not\leq_c \widetilde{K}$ и, тем более, $\widetilde{FLO} \not\leq_c \widetilde{K}$. Тем не менее предложение 3 окажется в дальнейшем полезным.

Результаты

Докажем сначала, что $\widetilde{K} \not\leq_c K$ может иметь место для бесконечных классов конечных структур.

Теорема 1. *Существует класс K неориентированных конечных графов такой, что $\widetilde{K} \not\leq_c K$.*

Доказательство. Пусть K – класс из предложения 3. Предположим, что $\widetilde{K} \leq_c K$ посредством оператора перечисления Γ. Преобразуем фридбергову нумерацию $\{\mathcal{X}_n\}_{n\in\omega}$ во фридбергову нумерацию $\{\widetilde{\mathcal{X}}_n\}_{n\in\omega}$ таким образом, что $\widetilde{\mathcal{X}}_n \bigcap \widetilde{\mathcal{X}}_m = \emptyset$ для $n \neq m$.

Для каждого n зафиксируем вложение $g : \widetilde{\mathcal{X}}_n \to \widetilde{\mathcal{X}}_{n+1}$ и рассмотрим объединенную структуру $\widetilde{\mathcal{X}}_n \biguplus \widetilde{\mathcal{X}}_{n+1}$, в которой каждый класс конгруэнтности $\widetilde{x}$, $x \in \mathcal{X}_n$, объединен с классом конгруэнтности $\widetilde{g(x)}$. Тогда $\widetilde{\mathcal{X}}_n \biguplus \widetilde{\mathcal{X}}_{n+1} \cong \widetilde{\mathcal{X}}_{n+1}$ и, по свойству монотонности, $\Gamma(\widetilde{\mathcal{X}}_n) \bigcup \Gamma(\widetilde{\mathcal{X}}_{n+1}) \subseteq \Gamma(\widetilde{\mathcal{X}}_n \biguplus \widetilde{\mathcal{X}}_{n+1}) \cong \Gamma(\widetilde{\mathcal{X}}_{n+1})$, откуда в силу конечности графов получаем $\Gamma(\widetilde{\mathcal{X}}_n) \subseteq \Gamma(\widetilde{\mathcal{X}}_{n+1})$. Получили противоречие с вышеприведенным предложением при $\mathcal{Y}_n = \Gamma(\widetilde{\mathcal{X}}_n)$. Теорема доказана.

□

Докажем теперь, что $\widetilde{K} \leq_c K$ может не иметь места для более естественного класса структур. Однако теперь придется рассмотреть бесконечные структуры. Для этого рассмотрим ориентированные графы с отношением смежности S. Например, через ω_S обозначим граф на множестве натуральных чисел при $S(x,y) \iff y = x+1$. Для произвольного графа L с отношением S обозначим через L^* обратный граф с отношением $S'(x,y) \iff S(y,x)$, в частности, в графе ω_S^* имеется ребро из x в y, если $y = x-1$. Кроме того, для вершин x и y ориентированного графе L будем писать $x \prec y$, если существует путь из x в y и $x \neq y$. В частности, для ω_S отношение $x \prec y$ эквивалентно обычному отношению порядка $x < y$ на натуральных числах, а в случае с ω_S^* отношение $x \prec y$ эквивалентно $x > y$.

Теорема 2. $\{\widetilde{\omega}_S, \widetilde{\omega}_S^\star\} \not\leq_c \{\omega_S, \omega_S^\star\}$.

Доказательство. Предположим, что $\{\widetilde{\omega}_S, \widetilde{\omega}_S^\star\} \leq_c \{\omega_S, \omega_S^\star\}$. Отметим, что существует оператор перечисления Δ такой, что для любого графа L справедливо равенство $\Delta(L) = L^*$. Поэтому можем зафиксировать оператор перечисления Γ такой, что

$$\mathcal{M} \cong \widetilde{\omega}_S \implies \Gamma(\mathcal{M}) \cong \omega_S;$$

$$\mathcal{M} \cong \widetilde{\omega}_S^* \implies \Gamma(\mathcal{M}) \cong \omega_S^*.$$

Будем использовать следующее утверждение о свойствах такого оператора Γ.

Лемма 1. *Если $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ определены на непересекающихся множествах натуральных чисел и $\mathcal{M} \cong \mathcal{M}' \cong \widetilde{\omega}_S$, то либо $\Gamma(\mathcal{M})$ является финальным сегментом множества $\Gamma(\mathcal{M}')$ относительно $\prec$, либо $\Gamma(\mathcal{M}')$ является финальным сегментом множества $\Gamma(\mathcal{M})$.*

Для доказательства леммы достаточно фиксировать изоморфизм $g : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ и рассмотреть объединенную структуру $\mathcal{M} \biguplus \mathcal{M}'$, в которой каждый класс конгруэнтности $\widetilde{x}$, $x \in \mathcal{M}$, объединен с классом конгруэнтности $\widetilde{g(x)}$. Тогда будем иметь $\mathcal{M} \biguplus \mathcal{M}' \cong \widetilde{\omega}_S$, так что граф $\Gamma(\mathcal{M} \biguplus \mathcal{M}') \cong \omega_S$ содержит как граф $\Gamma(\mathcal{M}) \cong \omega_S$, так и граф $\Gamma(\mathcal{M}') \cong \omega_S$. Это может быть справедливо только, если один из графов $\Gamma(\mathcal{M})$ и $\Gamma(\mathcal{M}')$ содержится в другом, причем выполнено утверждение леммы.

Рассмотрим теперь бесконечно много попарно непересекающихся копий $\mathcal{M}_i \cong \widetilde{\omega}_S$. Выберем $x_0 \in \Gamma(\mathcal{M}_0)$. По лемме 1 существует $x_1 \in \Gamma(\mathcal{M}_0) \bigcap \Gamma(\mathcal{M}_1)$ такой, что $x_0 \prec x_1$, то есть в $\Gamma(\mathcal{M}_0)$ справедливы атомные предложения

$$S(x_0, y_1),\ S(y_1, y_2), \ldots, S(y_{t-2}, y_{t-1}),\ S(y_{t-1}, y_t),\ S(y_t, x_1)$$

для некоторой последовательность элементов $y_1, \ldots, y_t$. По свойству непрерывности операторов перечисления можем фиксировать конечную подструктуру $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{M}_0$, обеспечивающую истинность всех этих атомных предложений (и, следовательно, $x_0 \prec x_1$) в любом $\Gamma(\mathcal{M})$, $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{F}_0$. Без ограничений общности можно считать, что $\mathcal{F}_0$ состоит из фактор-классов $\{\widetilde{z}_1^0, \ldots, \widetilde{z}_{n_0}^0\}$, причем имеет место $S(\widetilde{z}_{i+1}^0, \widetilde{z}_i^0)$ при $i < n_0$, то есть $\mathcal{F}_0$ пронумерован в «обратном» порядке.

Применим лемму 1 еще раз, чтобы получить $x_2 \in \Gamma(\mathcal{M}_1) \bigcap \Gamma(\mathcal{M}_2)$ такой, что $x_1 \prec x_2$. Тогда будет существовать $\mathcal{F}_1 = \{\widetilde{z}_1^1, \ldots, \widetilde{z}_{n_1}^1\} \subseteq \mathcal{M}_1$, такое что $x_1 \prec x_2$ будет иметь место в любом $\Gamma(\mathcal{M})$, $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{F}_1$, при этом $S(\widetilde{z}_{i+1}^1, \widetilde{z}_i^1)$ для $i < n_1$. Подструктуру $\mathcal{F}_1$ можно дополнительно расширить, чтобы имело место $n_1 > n_0$

Продолжая аналогично, получим последовательность x_k, $k \in \omega$, а также последовательность конечных структур

$$\mathcal{F}_k = \{\widetilde{z}_1^k, \ldots, \widetilde{z}_{n_k}^k\} \subseteq \mathcal{M}_k$$

такую, что $x_k \prec x_{k+1}$ будет иметь место в любом $\Gamma(\mathcal{M})$, $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{F}_k$, при этом имеет место $S(\widetilde{z}_{i+1}^k, \widetilde{z}_i^k)$ для $i < n_k < n_{k+1}$.

Рассмотрим теперь объединенную структуру $\mathcal{M} = \biguplus_k \mathcal{F}_k$, в которой каждый класс конгруэнтности $\widetilde{z}_i$, $i \in \omega$, получен объединением всех классов конгуэнтности $\widetilde{z}_i^k$ при $n_k > i$.

Тогда $\mathcal{M} \cong \widetilde{\omega}_S^*$, поскольку имеем $S(\widetilde{z}_{i+1}, \widetilde{z}_i)$ для всех $i \in \omega$, причем каждый класс конгруэнтности $\widetilde{z}_i$ бесконечен.

С другой стороны, $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{F}_k$ для всех $k \in \omega$, так что в $\Gamma(\mathcal{M})$ имеется возрастающая последовательность

$$x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_k \prec x_{k+1} \prec \cdots .$$

Следовательно, изоморфизм $\Gamma(\mathcal{M}) \cong \omega_S^*$ не может иметь место. Противоречие.

□

Следствие 1. *Для классов* $K_0 = \{\widetilde{\omega}_S, \widetilde{\omega}_S^\star\}$ *и* $K_1 = \{\omega_S, \omega_S^\star\}$ *имеет место* $\widetilde{K}_0 \leq_c \widetilde{K}_1$, *но не имеет место* $K_0 \leq_c K_1$.

Следствие 2. *Не существует оператора перечисления* Γ *такого, что для каждого* $\mathcal{X} \in \{\widetilde{\omega}_S, \widetilde{\omega}_S^*\}$ *имеет место* $\Gamma(\mathcal{X}) \cong \mathcal{X}/\sim$.

Замечание. В отличие от теоремы 1 легко заметить, что имеет место $\widetilde{K} \leq_c K$ для любого класса K, состоящего из конечных линейных порядков. В связи с теоремой 2 было бы интересно установить, имеет ли место вложение $\{\widetilde{\omega}, \widetilde{\omega}^\star\} \leq_c$ $\leq_c \{\omega, \omega^\star\}$ для линейного порядка натуральных чисел ω и обратного к нему ω^*.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ и Национального научного фонда Болгарии (проект № 17-51-18083). Кроме того, научная работа И.Ш. Калимуллина была профинансирована в рамках выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (проект № 1.451.2016/1.4).

Литература

1. *Калверт У., Камминс Д., Найт Дж.Ф., Миллер С.* Сравнение классов конечных структур // Алгебра и логика. – 2004. – Т. 43, № 6. –С. 666–701.
2. *Knight J.F., Miller S., Boom M.V.* Turing computable embeddings // J. Symb. Log. – 2007. – V. 72, No 3. – P. 901–918.
3. *Rossegger D.* On functors enumerating structures // Сиб. электрон. матем. изв. – Т. 14. – P. 690–702. – doi: 10.17377/semi.2017.14.059.
4. *Ocasio-Gonzalez V.A.* Turing computable embeddings and coding families of sets // Cooper S.B., Dawar A., Lowe B. (Eds.) How the World Computes. CiE 2012. Lecture Notes in Computer Science, V. 7318. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2012. – P. 539–548. – doi: 10.1007/978-3-642-30870-3_54.
5. *Эндрюс У., Душенин Д.И., Хилл К., Найт Дж.Ф., Мельников А.Г.* Сравнение классов конечных сумм // Алгебра и логика. – 2015. – Т. 54, № 6. – С. 748–768. – doi: 10.17377/alglog.2015.54.605.
6. *Bazhenov N.* Turing computable embeddings, computable infinitary equivalence, and linear orders // Kari J., Manea F., Petre I. (Eds.) Unveiling Dynamics and Complexity. CiE 2017. Lecture Notes in Computer Science, V. 10307. – Cham: Springer, 2017. – P. 141–151. – doi: 10.1007/978-3-319-58741-7_15.
7. *Kalimullin I.Sh.* Computable embeddings of classes of structures under enumeration and turing operators // Lobachevskii J. Math. – 2018. – V. 39, No 1. – P. 84–88. – doi: 10.1134/S1995080218010146.

Поступила в редакцию
11.09.18

Ватев Стефан, главный ассистент

Софийский университет имени святого Климента Охридского
бул. Цар Освободител, д. 15, г. София, 1504, Болгария

Ганчев Христо, профессор

Софийский университет имени святого Климента Охридского
бул. Цар Освободител, д. 15, г. София, 1504, Болгария

Калимуллин Искандер Шагитович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник кафедры алгебры и математической логики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *ikalimul@gmail.com*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

**UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)**

2018, vol. 160, no. 4, pp. ???–???

Computable Embedding of Classes of Algebraic Structures with Congruence Relation

S. Vatev[a], *H. Ganchev*[a], *I.Sh. Kalimullin*[b*]

[a]*Sofia University St. Kliment Ohridski, Sofia, 1504 Bulgaria*
[b]*Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*
E-mail: **ikalimul@gmail.com*

Received September 11, 2018

Abstract

It has been shown in the paper that there is an intermediate notion of embedding, which is based on the use of non-injective presentations of algebraic structures, between the computable embedding of classes of algebraic structures based on the enumeration operators and the Turing computable embedding. The problem of equivalence of this notion to the injective computable embedding is related to the problem of effective factorization by enumeration operators.

Keywords: enumeration operator, Turing operator, algebraic structure, atomic diagram

Acknowledgments. The study was supported by the Russian Foundation for Basic Research and the National Science Fund of Bulgaria (project no. 17-51-18083). I.Sh. Kalimullin's research was funded within the framework of the state assignment in the sphere of scientific activities (project no. 1.451.2016/1.4).

References

1. Calvert W., Cummins D., Knight J.F., Miller S. Comparing classes of finite structures. *Algebra Logic*, 2004, vol. 43, no. 6, pp. 374–392. doi: 10.1023/B:ALLO.0000048827.30718.2c.
2. Knight J.F., Miller S., Boom M.V. Turing computable embeddings. *J. Symb. Logic*, 2007, vol. 72, no. 3, pp. 901–918.
3. Rossegger D. On functors enumerating structures. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2017, vol. 14, pp. 690–702. doi: 10.17377/semi.2017.14.059.
4. Ocasio-Gonzalez V.A. Turing computable embeddings and coding families of sets. In: Cooper S.B., Dawar A., Lowe B. (Eds.) *How the World Computes. CiE 2012. Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 7318. Berlin, Heidelberg, Springer, 2012, pp. 539–548. doi: 10.1007/978-3-642-30870-3_54.
5. Andrews U., Dushenin D.I., Hill C., Knight J.F., Melnikov A.G. Comparing classes of finite sums. *Algebra Logic*, 2016, vol. 54, no. 6, pp. 489–501. doi: 10.1007/s10469-016-9368-7.
6. Bazhenov N. Turing computable embeddings, computable infinitary equivalence, and linear orders. In: Kari J., Manea F., Petre I. (Eds.) *Unveiling Dynamics and Complexity. CiE 2017. Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 10307. Cham, Springer, 2017, pp. 141–151. doi: 10.1007/978-3-319-58741-7_15.

7. Kalimullin I.Sh. Computable embeddings of classes of structures under enumeration and turing operators. *Lobachevskii J. Math.*, 2018, vol. 39, no. 1, pp. 84–88. doi: 10.1134/S1995080218010146.

⟨ ***Для цитирования*:** *Ватев С., Ганчев Х., Калимуллин И.Ш.* Вычислимая вложимость классов алгебраических структур с отношением конгруэнтности // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2018. – Т. 160, кн. 4. – С. ???–???. ⟩

⟨ ***For citation*:** Vatev S., Ganchev H., Kalimullin I.Sh. Computable embedding of classes of algebraic structures with congruence relation. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2018, vol. 160, no. 4, pp. ???–???. (In Russian) ⟩