СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Писмен конкурсен изпит по Математика I

22 април 2018 г.

Тема №3.

ОТГОВОРИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

- **Максималният брой точки** от трите части на изпита е **100**
- Правилно отбелязаният отговор на всяка задача от 1. до 20. се оценява както следва:

задачи от 1. до 10. – 2 точки **задачи от 11. до 20. – 3 точки**

1.	А	Б	~~В~~	Г
2.	А	~~Б~~	В	Г
3.	~~А~~	Б	В	Г
4.	А	Б	В	~~Г~~
5.	А	Б	~~В~~	Г
6.	А	~~Б~~	В	Г
7.	~~А~~	Б	В	Г
8.	А	Б	В	~~Г~~
9.	А	Б	~~В~~	Г
10.	А	~~Б~~	В	Г
11.	~~А~~	Б	В	Г
12.	А	Б	В	~~Г~~
13.	~~А~~	Б	В	Г
14.	А	~~Б~~	В	Г
15.	~~А~~	Б	В	Г
16.	А	Б	~~В~~	Г
17.	А	Б	В	~~Г~~
18.	А	Б	~~В~~	Г
19.	А	~~Б~~	В	Г
20.	А	Б	В	~~Г~~

- Правилно попълненият отговор на **всяка задача от 21. до 25.** се оценява с **4 точки**

21.	$A = 5$
22.	$x = \dfrac{9}{8}$
23.	3000 лв.
24.	$x = 37$ и $y = 63$
25.	$S_{CMN} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

• **Пълното решение на всяка задача от 26. до 28. се оценява с 10 точки.**

Задача 26. За геометричната прогресия a_1, a_2, a_3, a_4 е известно, че

$$a_2 + a_3 = 3 \qquad \text{и} \qquad \frac{a_1 + a_4}{a_3 - a_1} = \frac{7}{2}.$$

Да се намерят членовете на тази прогресия.

Решение: Да означим с q частното на прогресията. Тогава от равенството $\dfrac{a_1 + a_4}{a_3 - a_1} = \dfrac{7}{2}$ получаваме $\dfrac{a_1 + a_1q^3}{a_1q^2 - a_1} = \dfrac{7}{2}$, или $\dfrac{a_1(1+q^3)}{a_1(q^2-1)} = \dfrac{7}{2}$. Следователно $a_1 \neq 0$ и $q \neq \pm 1$. След опростяване на дробта в лявата страна получаваме $\dfrac{1 - q + q^2}{q - 1} = \dfrac{7}{2}$. Това уравнение се свежда до квадратното уравнение

$$2q^2 - 9q + 9 = 0,$$

решенията на което са $q = 3$ и $q = \dfrac{3}{2}$. От $a_2 + a_3 = 3$ имаме $a_2(1+q) = 3$, откъдето $a_2 = \dfrac{3}{q+1}$.

При $q = 3$ намираме последователно $a_2 = \dfrac{3}{4}$, $a_1 = \dfrac{1}{4}$, $a_3 = \dfrac{9}{4}$ и $a_4 = \dfrac{27}{4}$.

При $q = \dfrac{3}{2}$ последователно намираме $a_2 = \dfrac{6}{5}$, $a_1 = \dfrac{4}{5}$, $a_3 = \dfrac{9}{5}$ и $a_4 = \dfrac{27}{10}$.

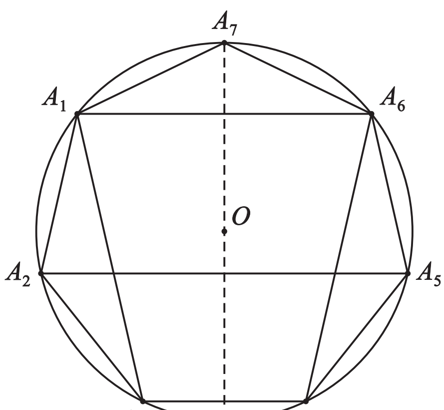
Окончателно, има две геометрични прогресии, удовлетворяващи условието:

$$\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{9}{4}, \frac{27}{4} \qquad \text{и} \qquad \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{5}, \frac{27}{10}.$$

Задача 27. а) Даден е правилен седмоъгълник. Да се намери броят на равнобедрените трапеци, върховете на които са върхове и на правилния седмоъгълник.

б) Да се намери броят на равнобедрените трапеци, върховете на които са върхове и на даден правилен 21-ъгълник.

Решение: а) Да означим върховете на правилния седмоъгълник, както е показано на чертежа и нека точка O е центърът на описаната окръжност. Ако четири върха на седмоъгълника образуват трапец, то има единствена права, минаваща през O и един от върховете на седмоъгълника, която е ос на симетрия както за равнобедрения трапец, така и за седмоъгълника. Седмоъгълникът има точно седем такива оси на симетрия.



Да разгледаме оста на симетрия OA_7, тогава има точно три равнобедрени трапеца, за които OA_7 е ос на симетрия и това са $A_1A_2A_5A_6$, $A_1A_3A_4A_6$ и $A_2A_3A_4A_5$. Всъщност, всяка двойка върхове измежду A_1, A_2, A_3 определя еднозначно по един равнобедрен трапец, като останалите му два върха са симетрични на избраните относно правата OA_7. Броят на комбинациите с които можем да изберем 2 върха измежду 3 е равен на $C_3^2 = 3$.

Аналогично, за всяка от останалите 6 оси на симетрия OA_k, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, имаме по три трапеца, за които OA_k е ос на симетрия.

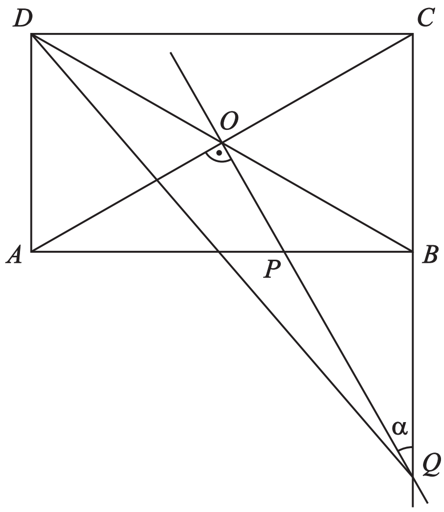
Следователно, търсеният брой равнобедрени трапеци е равен на $7 \cdot C_3^2 = 7 \cdot 3 = 21$.

б) В случая на правилен 21-ъгълник $A_1A_2 \ldots A_{21}$ с център на описаната окръжност O имаме 21 оси на симетрия – правите $OA_1, OA_2, \ldots, OA_{21}$.

Броят на равнобедрените трапеци с ос на симетрия OA_{21} се определя от броя на начините, по които можем да изберем два върха измежду $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$, а именно $C_{10}^2 = 45$.

В този случай, общият брой равнобедрени трапеци е равен на $21 \cdot C_{10}^2 = 21 \cdot 45 = 945$.

Задача 28. Даден е правоъгълник $ABCD$. През пресечната точка O на диагоналите му е прекарана права, перпендикулярна на диагонала AC, пресичаща страната AB в точка P и продължението на страната BC в точка Q, като $OP = 3$, $OQ = 6$ и $\sphericalangle CQO = \alpha$. Намерете стойността на $\operatorname{tg}\alpha$ и дължината на отсечката QD.



Решение: Триъгълниците ABC и QOC са подобни, защото $\sphericalangle ABC = \sphericalangle QOC = 90^\circ$ и $\sphericalangle ACB = \sphericalangle QCO$. Следователно $\sphericalangle BAC = \sphericalangle OQC = \alpha$. От правоъгълните триъгълници AOP и QOC имаме $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{OP}{AO} = \dfrac{3}{AO}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{OC}{QO} = \dfrac{OC}{6}$. Но $AO = OC = \dfrac{AC}{2}$, следователно $\dfrac{3}{\operatorname{tg}\alpha} = 6\operatorname{tg}\alpha$. Оттук $\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Тъй като $0 < \alpha < 90^\circ$ (остър ъгъл в правоъгълен триъгълник), тогава $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Сега намираме $OC = 6\operatorname{tg}\alpha = 3\sqrt{2}$. Триъгълникът ABO е равнобедрен (диагоналите в правоъгълник са равни и се разполовяват) и $\sphericalangle BAO = \sphericalangle ABO = \alpha$. Тогава $\sphericalangle AOD = 2\alpha$ (външен ъгъл за $\triangle AOB$) и следователно $\sphericalangle QOD = 2\alpha + 90^\circ$. Прилагайки косинусовата теорема за триъгълник QOD получаваме

$$QD^2 = QO^2 + OD^2 - 2\,QO \cdot OD\,\cos(90^\circ + 2\alpha).$$

Но $OD = OA = 3\sqrt{2}$ и $QO = 6$, следователно $QD^2 = 36 + 18 - 2 \cdot 6 \cdot 3\sqrt{2}\,\cos(90^\circ + 2\alpha)$. Тогава

$$QD^2 = 54 + 36\sqrt{2}\,\sin 2\alpha = 54 + 36\sqrt{2}\,\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = 54 + 36\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{1 + 1/2} = 54 + 48 = 102.$$

Окончателно $QD = \sqrt{102}$.