СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Писмен конкурсен изпит по Математика I

9 юни 2018 г.

Тема №1.

ОТГОВОРИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

- **Максималният брой точки** от трите части на изпита е **100**
- Правилно отбелязаният отговор на всяка задача от 1. до 20. се оценява както следва:

задачи от 1. до 10. – 2 точки **задачи от 11. до 20. – 3 точки**

1.	~~А~~	Б	В	Г	11.	~~А~~	Б	В	Г
2.	А	Б	В	~~Г~~	12.	А	Б	В	~~Г~~
3.	А	Б	~~В~~	Г	13.	А	~~Б~~	В	Г
4.	А	Б	В	~~Г~~	14.	А	Б	~~В~~	Г
5.	А	Б	~~В~~	Г	15.	А	Б	В	~~Г~~
6.	А	~~Б~~	В	Г	16.	А	~~Б~~	В	Г
7.	~~А~~	Б	В	Г	17.	~~А~~	Б	В	Г
8.	А	Б	~~В~~	Г	18.	А	Б	~~В~~	Г
9.	~~А~~	Б	В	Г	19.	А	~~Б~~	В	Г
10.	А	~~Б~~	В	Г	20.	А	Б	В	~~Г~~

- Правилно попълненият отговор на **всяка задача от 21. до 25.** се оценява с **4 точки**

21.	$C = 1$
22.	$x = -1,\ y = -4$
23.	$n = 7$
24.	23 лв.
25.	$r = \sqrt{2}$

• **Пълното решение на всяка задача от 26. до 28. се оценява с 10 точки.**

Задача 26. Да се реши уравнението: $x^2-4x+\sqrt{x^2-4x}=6$.

Решение: Допустими стойности за x са решенията на неравенството $x^2-4x \geq 0$ и това са $x \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.

В даденото уравнение полагаме $t=\sqrt{x^2-4x}$, $t \geq 0$. За t получаваме квадратното уравнение $t^2+t-6=0$. Корените му са $t_1=2$ и $t_2=-3$, но от тях само $t_1=2 \geq 0$.

От $\sqrt{x^2-4x}=2$ след повдигане на втора степен получаваме $x^2-4x-4=0$. Корените на това уравнение са $x_1=2+2\sqrt{2}$ и $x_2=2-2\sqrt{2}$.

Тъй като $2+2\sqrt{2}>4$ и $2-2\sqrt{2}<0$, то и двата корена x_1, x_2 са от допустимите стойности за x.

Следователно, решенията на даденото уравнение са $x_1=2+2\sqrt{2}$ и $x_2=2-2\sqrt{2}$.

Задача 27. Мерките на ъглите в четириъгълник образуват аритметична прогресия, като единият от ъглите има мярка 75°. Да се намери най-малката възможна стойност на мярката на най-големия ъгъл в такъв четириъгълник.

Решение: Нека $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ са градусните мерки на ъглите в четириъгълника и в този ред образуват аритметична прогресия с разлика d. Тогава $\alpha_2=\alpha_1+d$, $\alpha_3=\alpha_1+2d$, $\alpha_4=\alpha_1+3d$ и

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=4\alpha_1+6d=360, \qquad \text{т.е.} \qquad 2\alpha_1+3d=180.$$

Разглеждаме последователно четирите възможни случая.

При $\alpha_1=75$ намираме $d=10$ и ъглите в четириъгълника са с големини $\alpha_1=75^\circ$, $\alpha_2=85^\circ$, $\alpha_3=95^\circ$, $\alpha_4=105^\circ$.

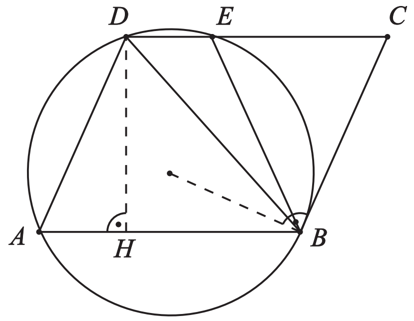
Ако $\alpha_2=\alpha_1+d=75$, от системата $\left| \begin{array}{l} 2\alpha_1+3d=180 \\ \alpha_1+d=75 \end{array} \right.$ намираме $a_1=45$ и $d=30$. Тогава мерките на ъглите в четириъгълника са $\alpha_1=45^\circ$, $\alpha_2=75^\circ$, $\alpha_3=105^\circ$ и $\alpha_4=135^\circ$.

Аналогично, ако $\alpha_3=\alpha_1+2d=75$, намираме $d=-30$. В този случай ъглите на четириъгълника имат мерки $\alpha_1=135^\circ$, $\alpha_2=105^\circ$, $\alpha_3=75^\circ$ и $\alpha_4=45^\circ$.

При $\alpha_4=\alpha_1+3d=75$ получаваме $d=-10$. Тогава ъглите на четириъгълника имат мерки $\alpha_1=105^\circ$, $\alpha_2=95^\circ$, $\alpha_3=85^\circ$ и $\alpha_4=75^\circ$.

Да забележим, че най-големият ъгъл в четириъгълник, удовлетворяващ условието на задачата има мярка или 105° или 135°. Следователно, най-малката възможна стойност на мярката на най-големия ъгъл в такъв четириъгълник е 105° .

Задача 28. Окръжност минава през върховете A, B, D на успоредник $ABCD$, пресича страната CD в точка E и се допира до правата BC. Да се намери дължината на по-късия диагонал на успоредника $ABCD$, ако $CE = 4$ и $DE = 2$.



Решение: Дадената окръжност се допира до правата BC в точката B. Тогава от равенството $CB^2 = CE\,.\,CD$ получаваме последователно $CB^2 = 4\,.\,6$ и $CB = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

За четириъгълника $ABED$ имаме, че $AB \| DE$ и освен това е вписан в окръжност. Следователно, четириъгълникът $ABED$ е равнобедрен трапец с основи $AB = 6$, $DE = 2$ и бедра $AD = BE = 2\sqrt{6}$.

За височината DH на трапеца $ABED$ по Питагоровата теорема за $\triangle AHD$ получаваме

$$DH = \sqrt{AD^2 - \left(\frac{AB - DE}{2}\right)^2} = \sqrt{24 - 4} = 2\sqrt{5}.$$

За диагонала BD на дадения успоредник намираме $BD = \sqrt{DH^2 + BH^2} = \sqrt{20 + 16} = 6$.

От $AB > DE$ следва, че ъгълът при голямата основа AB на трапеца $ABED$ е остър. От косинусовата теорема за триъгълниците ABC и ABD имаме $BD = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\sphericalangle A}$ и $AC = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\sphericalangle A}$, където a и b са дължините на страните на успоредника. Тъй като $\sphericalangle A$ е остър, то $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\sphericalangle A} < \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\sphericalangle A}$, т.е. $BD < AC$.

Окончателно, по-късият диагонал на успоредника е $BD = 6$.