Софийски Университет „Св. Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика

Национално състезание по елементарна математика

„Проф. Борислав Боянов"

Втори кръг, 11 март 2018

Примерни решения

Задача 1. Осем пирати броили златните си монети. Оказало се, че всеки двама имат различен брой монети, като единият от тях има цяло число пъти повече монети от другия. Възможно ли е общият брой монети да е бил: а) 2018 ; б) 2019 ?

Решение: а) Не. От условието получаваме, че пиратите имат съответно k_0 , k_0k_1 , $k_0k_1k_2$, $k_0k_1k_2k_3$, $k_0k_1k_2k_3k_4$, $k_0k_1k_2k_3k_4k_5$, $k_0k_1k_2k_3k_4k_5k_6$, $k_0k_1k_2k_3k_4k_5k_6k_7$ монети, като k_i са цели положителни числа, $k_i \geq 2$ за $1 \leq i \leq 7$. От

$$1 + k_1 + k_1k_2 + k_1k_2k_3 + k_1k_2k_3k_4 + k_1k_2k_3k_4k_5 + k_1k_2k_3k_4k_5k_6 + k_1k_2k_3k_4k_5k_6k_7 \geq 255$$

намираме $k_0 \leq 7$. Понеже 2018 не се дели на 3, 4, 5 и 7, възможните стойности на k_0 са 1 и 2.

Не е възможно $k_0 = 1$, защото тогава

$$k_1 + k_1k_2 + k_1k_2k_3 + k_1k_2k_3k_4 + k_1k_2k_3k_4k_5 + k_1k_2k_3k_4k_5k_6 + k_1k_2k_3k_4k_5k_6k_7 = 2017 ,$$

а 2017 е просто число.

При $k_0 = 2$ имаме

$$k_1 + k_1k_2 + k_1k_2k_3 + k_1k_2k_3k_4 + k_1k_2k_3k_4k_5 + k_1k_2k_3k_4k_5k_6 + k_1k_2k_3k_4k_5k_6k_7 = 1008 .$$

От

$$1 + k_2 + k_2k_3 + k_2k_3k_4 + k_2k_3k_4k_5 + k_2k_3k_4k_5k_6 + k_2k_3k_4k_5k_6k_7 \geq 127 ,$$

следва $2 \leq k_1 \leq 7$, като $k_1 \neq 5$, защото 5 не дели 1008.

Не е възможно $k_1 = 2$, защото тогава

$$k_2 + k_2k_3 + k_2k_3k_4 + k_2k_3k_4k_5 + k_2k_3k_4k_5k_6 + k_2k_3k_4k_5k_6k_7 = 503 ,$$

а 503 е просто число.

При $k_1 = 3$ имаме

$$k_2 + k_2k_3 + k_2k_3k_4 + k_2k_3k_4k_5 + k_2k_3k_4k_5k_6 + k_2k_3k_4k_5k_6k_7 = 335 = 5.67 ,$$

откъдето $k_2 = 5$ и

$$k_3 + k_3k_4 + k_3k_4k_5 + k_3k_4k_5k_6 + k_3k_4k_5k_6k_7 = 66 = 2.33 ,$$

т.е. $k_3 = 2$, защото $1 + k_4 + k_4k_5 + k_4k_5k_6 + k_4k_5k_6k_7 \geq 31$. Тогава $k_4 + k_4k_5 + k_4k_5k_6 + k_4k_5k_6k_7 = 32$ и, следователно, $k_4 = 2$ и $k_5 + k_5k_6 + k_5k_6k_7 = 15$. Последното равенство е невъзможно.

Следователно, не е възможно $k_1 = 3$.

При $k_1 = 4$ имаме

$$k_2 + k_2k_3 + k_2k_3k_4 + k_2k_3k_4k_5 + k_2k_3k_4k_5k_6 + k_2k_3k_4k_5k_6k_7 = 251 ,$$

което е невъзможно, защото 251 е просто число.

При $k_1 = 6$ имаме

$$k_2 + k_2k_3 + k_2k_3k_4 + k_2k_3k_4k_5 + k_2k_3k_4k_5k_6 + k_2k_3k_4k_5k_6k_7 = 167\,,$$

което е невъзможно, защото 167 е просто число.

При $k_1 = 7$ имаме

$$k_2 + k_2k_3 + k_2k_3k_4 + k_2k_3k_4k_5 + k_2k_3k_4k_5k_6 + k_2k_3k_4k_5k_6k_7 = 143 = 11.13\,,$$

което е невъзможно, защото

$$1 + k_3 + k_3k_4 + k_3k_4k_5 + k_3k_4k_5k_6 + k_3k_4k_5k_6k_7 \geq 63\,.$$

б) Да. Например: $1 + 2 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024 = 2019$.

Задача 2. Да се намерят всички цели числа $(a,\, b,\, c)$, които са решения на неравенството:

$$2a^2 + 2b^2 + 11c^2 - ab - 7bc + 4ac - 8a - 7b - 2c + 20 < 0\,.$$

Решение: Лявата страна е цяло число, затова даденото неравенство е еквивалентно с

$$2a^2 + 2b^2 + 11c^2 - ab - 7bc + 4ac - 8a - 7b - 2c + 21 \leq 0\,,$$

а последното неравенство може да се запише във вида

$$\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{b}{2} - c - 1\right)^2 + (a + 2c - 4)^2 \leq 2\,. \tag{1}$$

Възможни са два случая:

Случай 1: b е нечетно число. Неравенството (1) е изпълнено само ако (a, b, c) е решение на системата

$$\left|\begin{array}{l} \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} - c - 1\right)^2 = \frac{1}{4} \\ a + 2c - 4 = 0 \end{array}\right. .$$

Целочислените решения на тази система са $(a, b, c) = (2,\, 3,\, 1)$ и $(a, b, c) = (2,\, 5,\, 1)$.

Случай 2: b е четно число. Неравенството (1) е възможно само ако $c = \frac{b}{2} - 1$, и след заместване получаваме

$$\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + (a + b - 6)^2 \leq 2\,.$$

Последното неравенство е изпълнено само когато a и b са решения на някоя от системите уравнения

$$\left|\begin{array}{l} a - \frac{b}{2} = 0 \\ a + b - 6 = 0 \end{array}\right. ,\quad \left|\begin{array}{l} \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 = 1 \\ (a + b - 6)^2 = 1 \end{array}\right. ,\quad \left|\begin{array}{l} a - \frac{b}{2} = 0 \\ (a + b - 6)^2 = 1 \end{array}\right. ,\quad \left|\begin{array}{l} \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 = 1 \\ a + b - 6 = 0 \end{array}\right. .$$

Решението на първата система е $(a, b) = (2, 4)$, целите решения на втората система са $(a, b) = (3, 4)$ и $(a, b) = (1, 4)$, а последните две системи нямат цели решения. Замествайки $c = \frac{b}{2} - 1 = 1$, получаваме целите решения на даденото неравенство:
$(a, b, c) = (2,\, 4,\, 1)$, $(a, b, c) = (1,\, 4,\, 1)$, $(a, b, c) = (3,\, 4,\, 1)$.

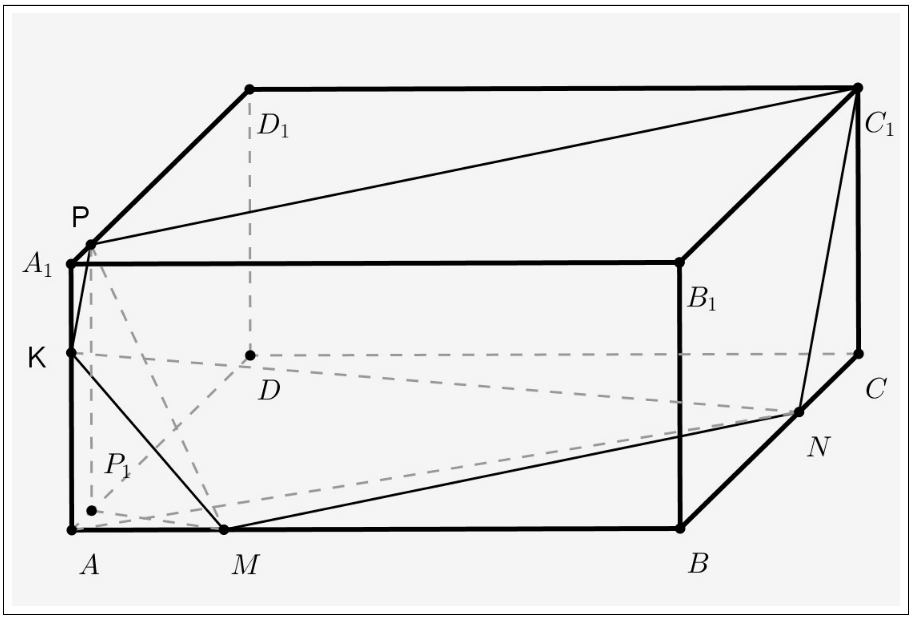
Отговор: (2, 3, 1); (2, 5, 1); (2, 4, 1); (1, 4, 1); (3, 4, 1).

Задача 3. На ръбовете AB и BC на правоъгълен паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ са взети точки $M \in AB$ и $N \in BC$, като $AM : MB = 1 : 3$ и $BN : NC = 2 : 1$. Да се намери отношението $AB : BC : AA_1$, ако около многоъгълника, получен от пресичането на паралелепипе да с равнината, определена от точките M, N и C_1, може да се опише окръжност.

Решение: Означаваме $AB = a$, $BC = b$ и $AA_1 = c$. По условие $AM = \dfrac{a}{4}$, $MB = \dfrac{3a}{4}$, $BN = \dfrac{2b}{3}$, $NC = \dfrac{b}{3}$.

Нека P е пресечната точка на равнината MNC_1 с правата A_1D_1. Тогава $MN \parallel C_1P$ (като пресечници на равнина с успоредни равнини) и, следователно, $\triangle MBN$ и $\triangle C_1D_1P$ са подобни, откъдето $\dfrac{MB}{C_1D_1} = \dfrac{BN}{D_1P}$. Така намираме $D_1P = \dfrac{8b}{9}$ и $PA_1 = \dfrac{b}{9}$.

Аналогично, нека K е пресечната точка на равнината MNC_1 с правата AA_1. Тогава $NC_1 \parallel PK$ (като пресечници на равнина с успоредни равнини) и, следователно, $\triangle NCC_1$ и $\triangle PA_1K$ са подобни, откъдето $\dfrac{NC}{PA_1} = \dfrac{CC_1}{A_1K}$. Така намираме $A_1K = \dfrac{c}{3}$ и $KA = \dfrac{2c}{3}$.



Следователно петоъгълникът MNC_1PK е търсеното сечение. Той е вписан в окръжност тогава и само тогава, когато и двата четириъгълника MNC_1P и NC_1PK са вписани в окръжност. Понеже $MN \parallel C_1P$, то MNC_1P е равнобедрен трапец, т.е. $NC_1 = MP$, и, аналогично, от $NC_1 \parallel PK$ следва, че NC_1PK е равнобедрен трапец, т.е. $C_1P = MK$.

Нека P_1 е ортогоналната проекция на P в равнината $ABCD$. Тогава $P_1 \in AD$ и $AP_1 = \dfrac{b}{9}$. Следователно

$$MP^2 = MP_1^2 + PP_1^2 = AM^2 + AP_1^2 + PP_1^2 = \frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{81} + c^2 .$$

Имаме и $NC_1^2 = NC^2 + CC_1^2 = \dfrac{b^2}{9} + c^2$, откъдето $\dfrac{a^2}{16} = \dfrac{8b^2}{81}$, или $\dfrac{a}{b} = \dfrac{8\sqrt{2}}{9}$.
Пресмятаме още

$$KN^2 = AK^2 + AN^2 = AK^2 + AB^2 + BN^2 = \frac{4c^2}{9} + a^2 + \frac{4b^2}{9}$$

и $C_1P^2 = C_1D_1^2 + PD_1^2 = a^2 + \dfrac{64b^2}{81}$, откъдето $\dfrac{4c^2}{9} = \dfrac{28b^2}{81}$, или $\dfrac{b}{c} = \dfrac{3}{\sqrt{7}}$.

Окончателно $a : b : c = 8\sqrt{2} : 9 : 3\sqrt{7}$.

Отговор: $\boldsymbol{AB : BC : AA_1 = 8\sqrt{2} : 9 : 3\sqrt{7}}$.

Задача 4. Сумата на неотрицателните числа $x_i,\ i=1,\dots,n\ (n\geq 2)$ е равна на 1. Да се намери най-голямата възможна стойност на $x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n+x_nx_1$.

Решение: Полагаме

$$f_n(x_1,x_2,\dots,x_n)=x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n+x_nx_1\,.$$

Случай 1: $n=2$. Имаме

$$f_2(x_1,x_2)=2x_1x_2=\frac{1}{2}\Big((x_1+x_2)^2-(x_1-x_2)^2\Big)\leq\frac{1}{2}$$

с равенство за $x_1=x_2=\dfrac{1}{2}$.

Случай 2: $n=3$. Имаме

$$\begin{aligned}f_3(x_1,x_2,x_3)&=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\\&=\frac{1}{6}\Big(2\,(x_1+x_2+x_3)^2-(x_1-x_2)^2-(x_2-x_3)^2-(x_3-x_1)^2\Big)\leq\frac{1}{3}\end{aligned}$$

с равенство за $x_1=x_2=x_3=\dfrac{1}{3}$.

Случай 3: $n=2k\,,\ k\geq 2$. Имаме

$$f_n(x_1,x_2,\dots,x_n)\leq\Big(\sum_{i=1}^{k}x_{2i}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{k}x_{2i-1}\Big)=\Big(\sum_{i=1}^{k}x_{2i}\Big)\Big(1-\sum_{i=1}^{k}x_{2i}\Big)\leq\frac{1}{4}$$

с равенство например за $x_1=x_2=\dfrac{1}{2}\,,\ x_3=x_4=\cdots=x_n=0$.

Случай 4: $n=2k+1\,,\ k\geq 2$.

f_n не се променя при циклична смяна $(x_1,x_2,\dots,x_n)\mapsto(x_i,x_{i+1},\dots,x_n,x_1,\dots,x_{i-1})$, затова без ограничение можем да смятаме, че $x_1=\min\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$.

Имаме $(2\leq 2k-2=n-3)$

$$\begin{aligned}f_n(x_1,x_2,\dots,x_n)&\leq\Big(\sum_{i=1}^{k}x_{2i}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{k+1}x_{2i-1}\Big)+x_{2k+1}x_1-x_2x_{2k+1}\\&=\Big(\sum_{i=1}^{k}x_{2i}\Big)\Big(1-\sum_{i=1}^{k}x_{2i}\Big)+x_{2k+1}x_1-x_2x_{2k+1}\leq\frac{1}{4}\end{aligned}$$

с равенство например за $x_1=x_2=\cdots=x_{n-2}=0\,,\ x_{n-1}=x_n=\dfrac{1}{2}$.

Отговор: $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{\min\,(n,4)}}$.

Задача 5. Нека $n\geq 3$ е естествено число, и $a_1=3n,\ \ a_2=\dfrac{5}{2}\,(n-1)n$. Полиномът

$$P(x)=x^n+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k\,x^{n-k}$$

има само реални и положителни корени. Ако x_n е най-големият от тези корени, да се намери максималната стойност на x_n и полином $P(x)$, за който се достига.

Решение: Ако $x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_n$ са всичките корени на $P(x)$, тогава от формулите на Виет имаме

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=a_1=3n,\qquad\sum_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j=a_2=\frac{5}{2}\,(n-1)n\,,$$

и от тук

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2-2\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j=a_1^2-2a_2=4n^2+5n\,.$$

Прилагаме неравенството между средното квадратично и средното аритметично

$$\Big(\frac{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2}{n-1}\Big)^{1/2}\ge\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\,,$$

и получаваме

$$\Big(\frac{4n^2+5n-x_n^2}{n-1}\Big)^{1/2}\ge\frac{3n-x_n}{n-1}\,.$$

Дясната страна е положителна, и след повдигаме на квадрат и преработка получаваме последователно еквивалентните неравенства

$$\begin{aligned}&4n^2+5n-x_n^2\ge\frac{(3n-x_n)^2}{n-1}\ \Leftrightarrow\ (n-1)(4n^2+5n-x_n^2)\ge 9\,n^2-6n\,x_n+x_n^2\\&\Leftrightarrow\ x_n^2-6x_n-4n^2+8\,n+5\le 0\,.\end{aligned}\tag{2}$$

Решението на неравенството (2) е $x_n\in[5-2n,2n+1]$, откъдето следва, че $x_n\le 2n+1$. Равенството се достига, когато имаме равенство в неравенството между средното квадратично и средното аритметично, т.е. когато

$$x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=\frac{3n-(2n+1)}{n-1}=1\,,$$

или за полинома $P(x)=(x-1)^{n-1}(x-2n-1)$.

Отговор: $\boldsymbol{x_n=2n+1\,;\quad P(x)=(x-1)^{n-1}(x-2n-1)}$.