Софийски Университет „Св. Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика

Национално състезание по елементарна математика

„Проф. Борислав Боянов"

Втори кръг, 11 март 2018

Задача 1. Осем пирати броили златните си монети. Оказало се, че всеки двама имат различен брой монети, като единият от тях има цяло число пъти повече монети от другия. Възможно ли е общият брой монети да е бил: а) 2018 ; б) 2019 ?

Задача 2. Да се намерят всички цели числа (a, b, c), които са решения на неравенството:

$$2a^2 + 2b^2 + 11c^2 - ab - 7bc + 4ac - 8a - 7b - 2c + 20 < 0\,.$$

Задача 3. На ръбовете AB и BC на правоъгълен паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ са взети точки $M \in AB$ и $N \in BC$, като $AM : MB = 1 : 3$ и $BN : NC = 2 : 1$. Да се намери отношението $AB : BC : AA_1$, ако около многоъгълника, получен от пресичането на паралелепипеда с равнината, определена от точките M, N и C_1, може да се опише окръжност.

Задача 4. Сумата на неотрицателните числа $x_i,\ i = 1, \ldots, n$ $(n \geq 2)$ е равна на 1. Да се намери най-голямата възможна стойност на $x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1$.

Задача 5. Нека $n \geq 3$ е естествено число, и $a_1 = 3n$, $a_2 = \dfrac{5}{2}(n-1)n$. Полиномът

$$P(x) = x^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k\, x^{n-k}$$

има само реални и положителни корени. Ако x_n е най-големият от тези корени, да се намери максималната стойност на x_n и полином $P(x)$, за който тази стойност се достига.