Софийски Университет „Св. Климент Охридски"

Факултет по математика и информатика

Национално състезание по елементарна математика

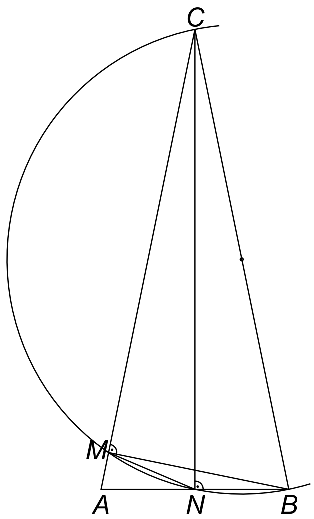
„Проф. Борислав Боянов"

Първи кръг, 11 февруари 2018

Задача 1. Да се реши неравенството $x^6 + 8 \le 9\,|x|^3$.

Решение: Полагаме $y = |x|^3$. Неравенството се трансформира в $y^2 + 8 \le 9y$ с решения $1 \le y \le 8$. Тогава $1 \le |x|^3 \le 8$ или $1 \le |x| \le 2$, откъдето получаваме решенията на даденото неравенство — $x \in [-2,\,-1] \cup [1,\,2]$. **Отговор:** $\boldsymbol{x \in [-2,\,-1] \cup [1,\,2]}$.

Задача 2. Даден е равнобедрен триъгълник $\triangle ABC$ с основа $AB = 10$ и бедра $AC = BC = 25$. Окръжност с диаметър BC пресича страните AC и AB съответно в точките M и N. Да се намерят дължините на страните на $\triangle AMN$.



Решение: $\triangle CMB$ и $\triangle CNB$ са правоъгълни с хипотенуза BC. Тъй като CN е височина към основата AB на равнобедрения $\triangle ABC$, то тя е медиана, т.е. $AN = AB/2 = 5$.
Понеже MN е медиана в правоъгълния $\triangle ABM$, имаме $MN = AB/2 = 5$. $\triangle MAN \sim \triangle ABC$ като равнобедрени триъгълници с едни и същи ъгли при основите им, и от подобието им намираме $\dfrac{MA}{AB} = \dfrac{AN}{BC} = \dfrac{1}{5}$ и $MA = \dfrac{AB}{5} = 2$.

Отговор: $\boldsymbol{AM = 2,\ AN = MN = 5}$.

Задача 3. Да се реши неравенството:

$$\log_2 \frac{4^x - 3.2^{x+1} + 8}{2^x - 1} \le x + 2\ .$$

Решение: Неравенството е еквивалентно на:

$$\log_2 \frac{4^x - 3.2^{x+1} + 8}{2^x - 1} \le \log_2 2^{x+2}\ .$$

Полагаме $y = 2^x$ и получаваме системата неравенства:

$$\left|\begin{array}{l} \log_2 \dfrac{y^2 - 6y + 8}{y - 1} \le \log_2 (4y) \\ y > 0 \end{array}\right. .$$

Понеже функцията $\log_2 t$ е растяща, последната е еквивалентна на:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{y^2 - 6y + 8}{y - 1} \le 4y \\ \dfrac{y^2 - 6y + 8}{y - 1} > 0,\ y > 0 \end{array}\right. .$$

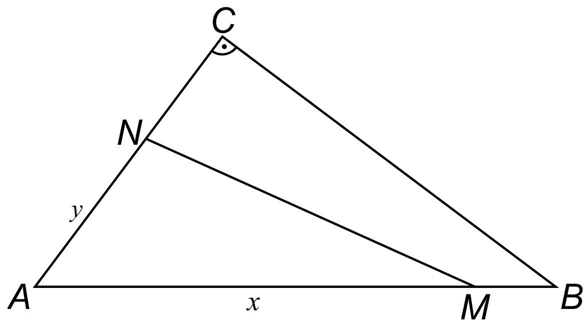
Първото неравенство е еквивалентно на $0 \le \dfrac{3y^2+2y-8}{y-1}$ с решения $y \in [-2,\, 1) \cup \left[\dfrac{4}{3},\, +\infty\right)$. Второто неравенство има решения $(1,\, 2) \cup (4,\, +\infty)$. Следователно, получената система има решения $y \in \left[\dfrac{4}{3},\, 2\right) \cup (4,\, +\infty)$.

От неравенствата $\dfrac{4}{3} \le 2^x < 2$ получаваме $2 - \log_2 3 \le x < 1$, а от $4 < 2^x$ неравенството съответно $2 < x$.

Отговор: $\boldsymbol{x \in \left[2 - \log_2 3,\ 1\right) \cup (2,\ +\infty)}$.

Задача 4. Точката M от хипотенузата AB на правоъгълния $\triangle ABC$ и точката N от катета AC на същия триъгълник са такива, че лицата и периметрите на $\triangle AMN$ и четириъгълника $NMBC$ са равни. Да се намери MN, ако $AC = 6$ и $BC = 8$.

Решение:



От Питагоровата теорема намираме $AB = 10$. Нека $AM = x$ и $AN = y$.

От равенството на периметрите получаваме $x + y = 10 - x + 6 - y + 8$, т.е. $x + y = 12$.

Понеже $S_{AMN} = \dfrac{1}{2} S_{ABC}$,

$S_{AMN} = \dfrac{xy \sin\alpha}{2}$, $(\alpha = \sphericalangle BAC)$

и $S_{ABC} = \dfrac{AB.AC.\sin\alpha}{2}$, то $xy = 30$.

Следователно, x и y са решенията на квадратното уравнение $t^2 - 12t + 30 = 0$. Понеже $0 < x < 10$ и $0 < y < 6$, то $x = 6 + \sqrt{6}$ и $y = 6 - \sqrt{6}$.

От косинусовата теорема, предвид $\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{3}{5}$, намираме

$$MN^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha = \left(6+\sqrt{6}\right)^2 + \left(6-\sqrt{6}\right)^2 - 2\left(6+\sqrt{6}\right)\left(6-\sqrt{6}\right)\cdot\frac{3}{5} = 48\,.$$

Отговор: $\boldsymbol{MN = 4\sqrt{3}}$.

Задача 5. Да се реши уравнението

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}\,.$$

Решение: Преобразуваме лявата страна:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x\,.$$

Уравнението добива вида $1 - 3\sin^2 x\cos^2 x = \dfrac{7}{16} \quad\Leftrightarrow\quad \sin^2(2x) = \dfrac{3}{4}$.

Решенията на уравнението $\sin(2x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ са $\dfrac{\pi}{6} + k\pi$ и $\dfrac{\pi}{3} + l\pi$, където k и l са цели числа, а решенията на уравнението $\sin(2x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ са $-\dfrac{\pi}{6} + m\pi$ и $\dfrac{2\pi}{3} + n\pi$, където m и n са цели числа.

Отговор: $\boldsymbol{x \in \left\{\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ \dfrac{\pi}{3} + k\pi,\ -\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ \dfrac{2\pi}{3} + k\pi\ :\ k\ -\ \textbf{цяло число}\right\}}$.

Задача 6. Кума Лиса решила да постави парола на новия си лаптоп, която да се получава от пренареждането на буквите в думата ХИТРУША (всичките главни), и в нея да има точно една двойка от последователни съгласни. Да се намери броят на различните пароли, които могат да се получат по този начин.

Решение: Всяка парола включва четири различни съгласни и три различни гласни букви. Съгласните могат да се подредят по $4! = 24$ различни начина, а гласните по $3! = 6$ различни начина. Всяка фиксирана наредена тройка от гласни букви трябва да раздели буквите на фиксирана наредена четворка от съгласни букви така, че да се получи точно една двойка от последователни съгласни, при което са възможни два варианта:

Вариант 1: няма две последователни гласни: 6 различни разделяния;

Вариант 2: има една двойка последователни гласни: 6 различни разделяния.

Ако с $\bullet$ означаваме съгласна буква, а с $|$ гласна буква, различните разделяния от *Вариант 1* са:

1) $|\bullet\bullet|\bullet|\bullet$ 2) $\bullet\bullet|\bullet|\bullet|$ 3) $|\bullet|\bullet\bullet|\bullet$ 4) $\bullet|\bullet\bullet|\bullet|$ 5) $|\bullet|\bullet|\bullet\bullet$ 6) $\bullet|\bullet|\bullet\bullet|$

(в наредената четворка от съгласните, двойката последователни съгласни може да е на първа, втора или трета позиция, и във всеки от тези случаи паролата може да започва с гласна или със съгласна буква). Различните разделяния от *Вариант 2* са:

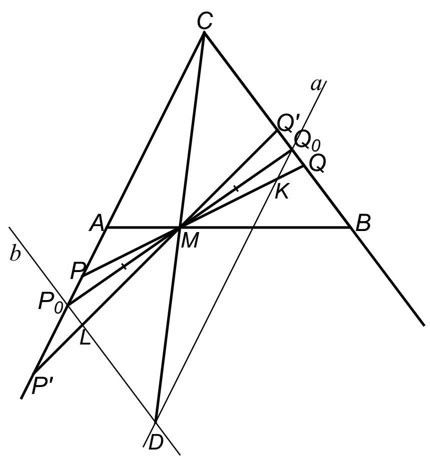
1) $\bullet\bullet||\bullet|\bullet$ 2) $\bullet\bullet|\bullet||\bullet$ 3) $\bullet||\bullet\bullet|\bullet$ 4) $\bullet|\bullet\bullet||\bullet$ 5) $\bullet||\bullet|\bullet\bullet$ 6) $\bullet|\bullet||\bullet\bullet$

(в наредената четворка от съгласните, двойката последователни съгласни може да е на първа, втора или трета позиция, а разделящите гласни са две или една след първата група от съгласни и респективно една или две след втората група от съгласни). Общият брой на различните пароли формирани по този начин е $24 \times 6 \times 2 \times 6 = 1728$.

Отговор: 1728 различни пароли.

Задача 7. Точката M от страната AB на $\triangle ABC$ е такава, че $AM : MB = 3 : 7$. Нека P и Q са точки сътветно от лъчите $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$, така че M да лежи на отсечката PQ.

Да се намери най-голямата възможна стойност на отношението $\dfrac{S_{ABC}}{S_{PQC}}$.



Решение: Ще покажем, че S_{PQC} е най-малко когато M е среда на отсечката PQ. Най-напред ще се убедим, че съществуват единствени точки $P_0 \in \overrightarrow{CA}$ и $Q_0 \in \overrightarrow{CB}$ такива че M е среда на отсечката P_0Q_0. Нека точката D е симетрична на C относно M. През D построяваме правите $a\,||AC$ и $b\,||BC$, и нека $P_0 = \overrightarrow{CA} \cap b$ и $Q_0 = \overrightarrow{CB} \cap a$. Тогава P_0DQ_0C е успоредник и M е среда на диагонала му P_0Q_0. Други точки $P \in \overrightarrow{CA}$ и $Q \in \overrightarrow{CB}$ с това свойство няма, защото тогава $PDQC$ би бил втори успоредник със страни върху $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ и диагонал CD.

Случай 1: P е произволна точка от отсечката CP_0, за която правата PM пресича лъча $\overrightarrow{CB}$, и нека $Q = \overrightarrow{CB} \cap PM$. Тогава Q_0 е между C и Q, и ако означим $K = a \cap PM$, имаме

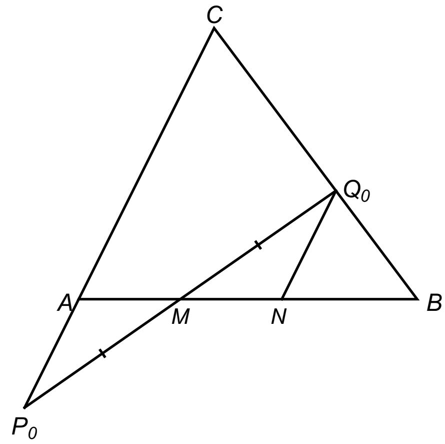
$$S_{P_0Q_0C} = S_{PQC} + S_{P_0PM} - S_{Q_0QM} = S_{PQC} + S_{P_0PM} - S_{KQ_0M} - S_{KQ_0Q} = S_{PQC} - S_{KQ_0Q} < S_{PQC}.$$

Случай 2: P е произволна точка от лъча $\overrightarrow{CA}$, непринадлежаща на отсечката CP_0. Нека в този случай означим точките P и Q съответно с P' и Q', и нека $L = b \cap P'M$, тогава

$$S_{P_0Q_0C} = S_{P'Q'C} + S_{Q_0Q'M} - S_{P_0P'M} = S_{P'Q'C} + S_{Q_0Q'M} - S_{LP_0M} - S_{LP_0P'} = S_{P'Q'C} - S_{LP_0P'} < S_{P'Q'C}.$$

Остава да намерим $\dfrac{S_{ABC}}{S_{P_0Q_0C}}$. Нека $N \in AB$ и $NQ_0 || CA$. Тогава $\Delta P_0AM \cong \Delta Q_0NM$ и $\Delta Q_0NB \sim \Delta CAB$. Да означим $AM = 3x$, тогава $MN = 3x$ и $NB = 4x$. Ако означим още $Q_0B = 2y$ и $Q_0N = 2z$, тогава от теоремата на Талес, подобието и еднаквостта на триъгълниците намираме $CQ_0 = 3y$, $CA = 5z$, $AP_0 = 2z$, $CP_0 = 7z$. За отношението на лицата получаваме

$$\frac{S_{ABC}}{S_{P_0Q_0C}} = \frac{CA.CB}{CP_0.CQ_0} = \frac{5z.5y}{7z.3y} = \frac{25}{21}.$$



Отговор: $\max \dfrac{\boldsymbol{S_{ABC}}}{\boldsymbol{S_{PQC}}} = \dfrac{\mathbf{25}}{\mathbf{21}}$.

Задача 8. Да се намерят всички реални стойности на c, за които уравнението

$$x^2 - 4x - c - \sqrt{8x^2 - 32x - 4c} = 0$$

има точно две различни реални решения.

Решение: Полагаме $y = \sqrt{2x^2 - 8x - c}$. Всяко решение (x_0, y_0) на системата

$$\left| \begin{array}{l} y^2 - c = 4y \\ \\ y^2 = 2x^2 - 8x - c, \ y \geq 0 \end{array} \right.$$

дава решение x_0 на изходното уравнение и, обратно – за всяко решение x_0 на изходното уравнение двойката $\left(x_0, \sqrt{2x_0^2 - 8x_0 - c}\right)$ е решение на системата.

След събиране на двете уравнения, получаваме еквивалентната система

$$\left| \begin{array}{l} y^2 - c = 4y, \ y \geq 0 \\ 2y^2 - c = 2x^2 - 8x - c + 4y \end{array} \right. ,$$

или

$$\left| \begin{array}{l} y^2 - 4y - c = 0, \ y \geq 0 \\ (y-1)^2 + 3 = (x-2)^2 \end{array} \right. .$$

Следователно, изходното уравнение има точно две различни решения тогава и само тогава, когато квадратното уравнение $y^2 - 4y - c = 0$ има точно един неотрицателен корен.

Това е възможно, когато:

- уравнението има двоен корен — тогава $c = -4$ и коренът е 2, т.е. $c = -4$ е решение на задачата;
- уравнението има корен 0 — тогава $c = 0$ и другият корен 4, т.е. $c = 0$ не е решение на задачата;
- уравнението има един положителен и един отрицателен корен — тогава $c > 0$ и тези стойности са решения на задачата.

Отговор: $\boldsymbol{c \in \{-4\} \cup (0, +\infty)}$.