СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА I

18 юни 2016 г.

Тема №1.

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!

Задача 1. Нека $a = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$, $b = \left(\sqrt[3]{27} : \sqrt[4]{16}\right)^{-1}$ и c $= 20\%$ от 2. Посочете вярното твърдение:

А) $c < a < b$ Б) $b < c < a$ В) $c < b < a$ Г) $a < b < c$

Задача 2. Ако $a = \sqrt{3}$ и $b = \sqrt{2}$, то стойността на израза $\dfrac{3a^3 - 3b^3}{a^2 + ab + b^2} - \dfrac{2a^3 + 2b^3}{a^2 - ab + b^2}$ е равна на:

А) $5\sqrt{3} - \sqrt{2}$ Б) $3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$ В) $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$ Г) $\sqrt{3} - 5\sqrt{2}$

Задача 3. Допустимите стойности на израза $\dfrac{\sqrt[3]{2 - x^2}}{\sqrt[4]{x^2 - 2}}$ са:

А) $x \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, \infty\right)$ Б) $x \in \varnothing$ В) $x \in \left(\sqrt{2}, \infty\right)$ Г) $x = \pm\sqrt{2}$

Задача 4. Решенията на неравенството $\dfrac{8 - x^3}{x^2 - x - 2} \leqq 0$ са:

А) $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 1]$ Б) $x \in (-\infty, -1]$

В) $x \in (-1, 2) \cup (2, \infty)$ Г) $x \in (-1, \infty)$

Задача 5. Ако $a = \lg 3$ и $b = \lg 5$, то $\log_3 5$ е равен на:

А) $\dfrac{b}{a}$ Б) $b - a$ В) $\dfrac{a}{b}$ Г) $a - b$

Задача 6. Решенията на системата $\left| \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 7 \\ x + y = 7 \end{array} \right.$ са:

А) $(-4, -3)$ Б) $(3, 4)$, $(4, 3)$ В) $(-3, -4)$, $(-4, -3)$ Г) $(4, 3)$

Задача 7. Ако α и β са корени на уравнението $x^2 + 5x - 3 = 0$, то числата $\dfrac{1}{\alpha}$ и $\dfrac{1}{\beta}$ са корени на уравнението:

А) $3t^2 + 5t - 1 = 0$ Б) $3t^2 - 5t - 1 = 0$ В) $t^2 + 5t - 3 = 0$ Г) $t^2 - 5t - 3 = 0$

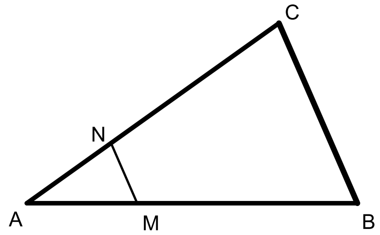
Задача 8. Ако $\alpha = \dfrac{\pi}{12}$, то стойността на израза $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}2\alpha - 1}$ е равна на:

А) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ Б) 1 В) -1 Г) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Задача 9. Върху страните AB и AC на ΔABC, с лице $S_{ABC} = 36$, са избрани съответно точките M и N, така че $AM : MB = 1 : 2$ и $MN || BC$. Лицето на ΔAMN е равно на:

А) $S_{AMN} = 9$ Б) $S_{AMN} = 4$

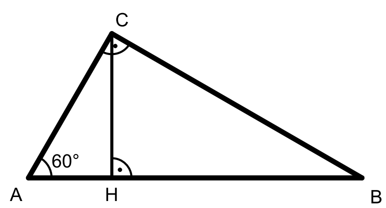
В) $S_{AMN} = 12$ Г) $S_{AMN} = 18$



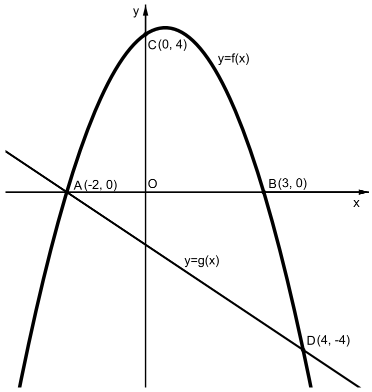
Задача 10. Даден е ΔABC, за който $AC = 5$, $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, $\sphericalangle BAC = 60^\circ$ и CH е височина. Дължината на отсечката BH е равна на:

А) $5\sqrt{3}$ Б) $2,5$

В) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ Г)$7,5$



Задача 11. Графиката на квадратната функция $y = f(x)$ пресича координатните оси в точките $A(-2, 0)$, $B(3, 0)$ и $C(0, 4)$, а графиката на линейната функция $y = g(x)$ пресича графиката на функцията $y = f(x)$ в точки $A(-2, 0)$ и $D(4, -4)$. Кое твърдение е вярно:



А) Най-голямата стойност на квадратната функция $y = f(x)$ е по-голяма от 4.

Б) Линейната функция $y = g(x)$ е растяща в интервала $(-\infty, \infty)$.

В) Решенията на неравенството $f(x) < g(x)$ са $x \in (-2, 4)$.

Г) Решенията на уравнението $f(x) = g(x)$ са $x = -2$, $x = 3$.

Задача 12. С коя от формулите се задава числова редица a_n, $n \in \mathbb{N}$, всички членове на която са естествени числа?

А) $a_n = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{6}$ Б) $a_n = \dfrac{(n-1)n}{4}$ В) $a_n = \dfrac{n(n+1)}{4}$ Г) $a_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

Задача 13. Дадена е аритметична прогресия $\div a_1, a_2, \cdots a_n$, за която $a_1 = 1$, $a_3 = 13$ и $S_n = 280$. Броят n на членовете на прогресията и последният ѝ член a_n са :

А) $n = 10$, $a_{10} = 56$ Б) $n = 10$, $a_{10} = 55$

В) $n = 11$, $a_{11} = 55$ Г) $n = 11$, $a_{11} = 56$

Задача 14. Ако $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}$, то $\sin x$ и $\cos x$ са:

А) $\sin x = \dfrac{3}{5}$, $\cos x = \dfrac{4}{5}$ Б) $\sin x = \dfrac{2}{5}$, $\cos x = \dfrac{3}{5}$

В) $\sin x = \dfrac{4}{5}$, $\cos x = \dfrac{3}{5}$ Г) $\sin x = \dfrac{4}{5}$, $\cos x = \dfrac{2}{5}$

Задача 15. Дадени са 48 еднакви карти с формата на квадрат. Броят на различните фигури с формата на правоъгълник, които могат да се съставят от всичките карти е:

А) 6 Б) 5 В) 4 Г) 3

Задача 16. Даден е статистическият ред: 1; 2; 2; 3; 4; 4; 4; 5; 6; 6; 6; 7; 8; 8; 9. Кое от твърденията НЕ е вярно?

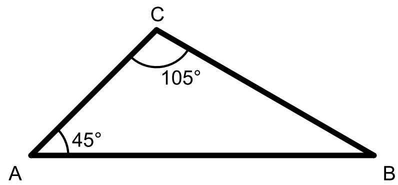
А) Медианата и средното аритметично на реда са равни.

Б) Ако прибавим нов елемент 4 към реда, то модата на новия ред ще бъде по-малка от медианата му.

В) Ако премахнем един елемент 4 от реда, то модата на новия ред ще бъде по-малка от медианата му.

Г) Ако прибавим нов елемент 4 към реда, то медианата на новия ред ще бъде равна на 4, 5.

Задача 17. Даден е ΔABC, за който $BC = 7$, $\sphericalangle ACB = 105°$, $\sphericalangle BAC = 45°$. Дължините на радиуса на описаната около триъгълника окръжност и страната AC са равни на:



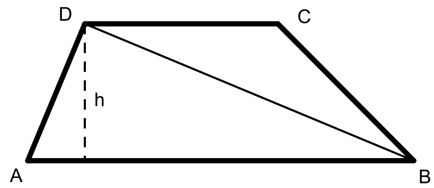
А) $R = 7\sqrt{2}$, $AC = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$ Б)$R = 7\sqrt{2}$, $AC = 7\sqrt{2}$

В) $R = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$, $AC = 7\sqrt{2}$ Г) $R = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$, $AC = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$

Задача 18. Даден е ΔABC, за който $AB = 2,5$; $BC = 3,5$; $\sphericalangle BAC = 120°$. Полупериметърът p на ΔABC е равен на:

А) $p = 7,5$ Б) $p = 8$ В) $p = 3,75$ Г) $p = 4$

Задача 19. Даден е трапец $ABCD$, за който $AB = 13$, $AD = 5$, $BD = 12$ и $S_{ABCD} = 45$. Дължината на основата CD, височината h и $S_{\Delta CDB}$ са съответно равни на:



А) $CD = 6,5$; $h = 4,62$; $S_{\Delta CDB} = 25$

Б) $CD = \dfrac{13}{2}$, $h = \dfrac{60}{13}$, $S_{\Delta CDB} = 15$

В)$CD = \dfrac{60}{13}$, $h = \dfrac{13}{2}$, $S_{\Delta CDB} = 15$

Г) $CD = 4,62$; $h = 6,5$; $S_{\Delta CDB} = 25$

Задача 20. Даден е четириъгълник $ABCD$, за който AC разполовява $\sphericalangle BAD$, $AD = 4$, $\sphericalangle CAD = 30°$, $\sphericalangle ACB = 75°$ и $BO = DO$, където O е пресечната точка на диагоналите AC и BD. Лицето на четириъгълника е равно на:

А) $S_{ABCD} = 8$ Б) $S_{ABCD} = 16$ В) $S_{ABCD} = 8\sqrt{3}$ Г) $S_{ABCD} = 16\sqrt{3}$

Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в листа за отговори!

Задача 21. Най-голямата стойност на израза $\sin 2x - \sin^2 3x + \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 3x\right)\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ е равна на:

Задача 22. Решенията на уравнението $\sqrt{3x-2} - \sqrt{2x-3} = 1$ са:

Задача 23. През първия месец от съществуването си новоучредената фирма „Възход 2016“ имала 4100 лв. разходи, а приходите ѝ били 2450 лв. От всеки следващ месец приходите на фирмата се увеличавали с по 600 лв., а разходите ѝ намалявали с по 500 лв. След колко месеца общата сума на приходите е надминала общата сума на разходите, т.е. фирмата е „излязла на печалба“?

Задача 24. Средният ръст на двамата треньори на детски баскетболен отбор е 205 см. В залата тренират 10 деца със среден ръст от 169 см. С колко сантиметра ще се повиши средният ръст на хората в залата при влизането на двамата треньори?

Задача 25. Даден е триъгълник ΔABC със страни $AB = 24$, $BC = 21$, $CA = 15$. Дължината на ъглополовящата CL на ъгъл $\sphericalangle ACB$ е равна на:

Пълните решения на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за решения!

Задача 26. Да се реши уравнението $\left(x^2 + 2x\right)^2 - 2\left|x^2 + 2x\right| - 3 = 0$.

Задача 27. С помощта на цифрите $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ е съставено четирицифрено число с неповтарящи се цифри. Колко такива числа могат да се образуват? Каква е вероятността съставеното число да е четно?

Задача 28. Даден е квадрат $ABCD$ с лице $S_{ABCD} = 2016$, за който с M е означена средата на страната AB, а O, N и P са съответно пресечните точки на AC и BD, BD и CM и AC и DM. Да се намери лицето на четириъгълника $MNOP$.

Време за работа 4 часа.

Драги кандидат-студенти,

- *номерирайте всички страници на беловата си;*
- *означавайте ясно началото и края на решението на всяка от задачите от 26. до 28. включително;*
- *решението на всяка от задачите от 26. до 28. включително трябва да започва на нова страница;*
- *не смесвайте белова и чернова;*
- *черновата не се проверява и не се оценява.*

Изпитната комисия ви пожелава успешна работа!