СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА I

27 март 2016 г.

Тема №2.

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!

Задача 1. Най-голямото от посочените числа е:

А) $1,7$ Б) $\sqrt[3]{5}$ В) $\sqrt[6]{26}$ Г) $\sqrt{3}$

Задача 2. Ако $a = 3^{-1}$ и $b = -5$, то стойността на израза $\dfrac{ab}{a+b}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)\left(a^{-1} + b^{-1}\right)$ е равна на:

А) $\dfrac{14}{5}$ Б) $3,5$ В) $\dfrac{16}{5}$ Г) $5,3$

Задача 3. Допустимите стойности на израза $\sqrt[4]{\dfrac{3-x}{(x-2)^2}}$ са:

А) $x \in (-\infty, 3]$ Б) $x \in [2, 3]$ В) $x \in (3, \infty)$ Г) $x \in (-\infty, 2) \cup (2, 3]$

Задача 4. Решенията на неравенството $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{9 - x^2} \leqq 0$ са:

А) $x \in [-3, 1] \cup [2, 3]$ Б) $x \in (-\infty, -3) \cup [1, 2] \cup (3, \infty)$

В) $x \in (-3, 1] \cup [2, 3)$ Г) $x \in (-\infty, -3] \cup [1, 2] \cup [3, \infty)$

Задача 5. Стойността на израза $\dfrac{\log_7 40}{\log_7 8} + \log_8 0,2$ е равна на:

А) -1 Б) 0 В) 128 Г) 1

Задача 6. Броят на решенията на системата $\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 2 \\ xy = 1 \end{array} \right.$ е равен на:

А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 4

Задача 7. Ако $\alpha + \beta = \dfrac{1}{2}$ и $\alpha\beta = -\dfrac{1}{3}$, то числата α и β са корени на уравнението:

А) $6t^2 - 3t - 2 = 0$ Б) $2t^2 - 3t - 6 = 0$ В) $6t^2 + 3t - 2 = 0$ Г) $2t^2 + 3t - 6 = 0$

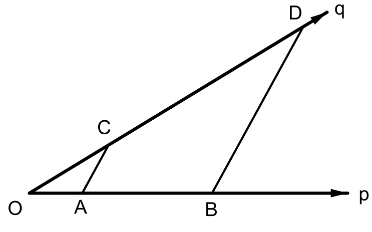
Задача 8. Ако $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$, то стойността на израза $\sin^2\alpha + 2\sin\left(\dfrac{5\pi}{2} - \alpha\right)$ е равна на:

А) 1 Б) $1,75$ В) $-1,75$ Г) $1,5$

Задача 9. Върху раменете на ъгъл $p\vec{O}q^{\to}$ са взети съответно точките A, B, C и D, такива че $AC||BD$, $OC = 6$, $CD = 10$ и $OB = 12$. Дължините на отсечките OA и AB са съответно равни на:

А) 4,5 и 7,5 Б) 3,5 и 8,5

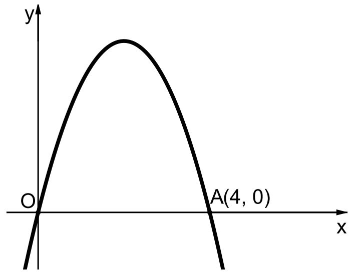
В) 4 и 8 Г) 5 и 7



Задача 10. Ако основата и бедрото на равнобедрен триъгълник са съответно равни на 12 и 10, то радиусът на вписаната в триъгълника окръжност е равен на:

А) 1 Б) 2 В) 3 Г) 4

Задача 11. На чертежа е изобразена графиката на функцията:



А) $f(x) = 4x + x^2$

Б) $f(x) = -4x + x^2$

В) $f(x) = -4x - x^2$

Г) $f(x) = 4x - x^2$

Задача 12. Ако редицата $\{b_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ е зададена с равенствата $b_1 = -3$, $b_n = b_{n-1} - 1$, то шестият ѝ член е:

А) -6 Б) -7 В) -8 Г) 4

Задача 13. Дадена е геометрична прогресия $\div\, a_1, a_2, a_3, \cdots$, за която $a_8 = 1$ и $\dfrac{a_4}{a_2} = \dfrac{1}{4}$. Първият член на прогресията е:

А) $a_1 = 128$ Б) $a_1 = 128$ или $a_1 = -128$ В) $a_1 = 256$ Г) $a_1 = 256$ или $a_1 = -256$

Задача 14. Ако $\sin 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то за стойностите на x е изпълнено:

А) $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$ или $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$, където $k \in \mathbb{Z}$

Б) $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ или $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$, където $k \in \mathbb{Z}$

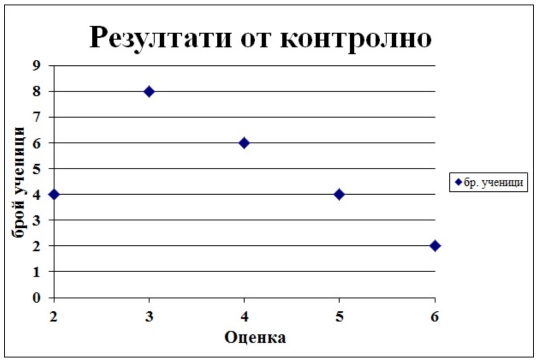
В) $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$ или $x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi$, където $k \in \mathbb{Z}$

Г) $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ или $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, където $k \in \mathbb{Z}$

Задача 15. В края на учебната година се оказало, че всички ученици от един клас са получили годишни оценки по математика - *Добър*, *Мн. добър* или *Отличен*, по български език и литература - *Среден*, *Добър*, *Мн. добър* или *Отличен*, а по физическо възпитание и спорт - *Мн. добър* или *Отличен*. Група ученици от този клас, разглеждайки бележниците си забелязали, че няма двама от групата, които да имат едни и същи оценки и по трите предмета. Колко най-много ученици има в тази група?

А) 4 Б) 24 В) 3 Г) 12

Задача 16. На диаграмата са дадени резултатите от контролно по математика. Средното аритметично, модата и медианата са:



А) $3\dfrac{2}{3}$, 3, $3\dfrac{1}{2}$ Б) $3\dfrac{1}{2}$, 3, $3\dfrac{2}{3}$

В) $3\dfrac{1}{3}$, 4, $3\dfrac{1}{2}$ Г) $3\dfrac{2}{3}$, 3, 4

Задача 17. Даден е ΔABC с ъгли 15°, 45° и 120°, който е вписан в окръжност с радиус $R = 19\sqrt{3}$. Дължината на най-голямата страна на ΔABC е равна на:

А) $19\sqrt{6}$ Б) 57 В) $38\sqrt{3}$ Г) $38\sqrt{2}$

Задача 18. Даден е ΔABC, за който страната $AB = 4$, медианата $AM = 3$ и $\sphericalangle AMB = 135^\circ$. Дължината на страната BC е равна на:

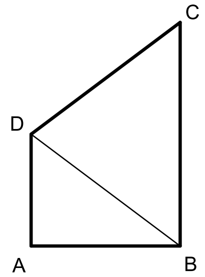
А) $BC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{23} - 3\right)$ Б) $BC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(3 + \sqrt{23}\right)$

В) $BC = \sqrt{2}\left(\sqrt{23} - 3\right)$ Г) $BC = \sqrt{2}\left(3 + \sqrt{23}\right)$

Задача 19. Даден е трапец $ABCD$ $(AB||CD)$, които е описан около окръжност k. Ако $AD = BC$, $\sphericalangle ABC = 30^\circ$ и $S_{ABCD} = 8$, то радиусът r на окръжността k е равен на:

А) $r = 1$ Б) $r = 2$ В) $r = 1,5$ Г) $r = \sqrt{2}$

Задача 20. Даден е четириъгълник $ABCD$ със страни $AB = 4$, $BC = 6$, $CD = 5$ и диагонал $BD = 5$, в който може да се впише окръжност. Лицето S_{ABCD} и дължината на радиуса r на тази окръжност са съответно равни на:



А) $S_{ABCD} = 31,5$ и $r = 3,5$ Б) $S_{ABCD} = 27$ и $r = 3$

В) $S_{ABCD} = 22,5$ и $r = 2,5$ Г) $S_{ABCD} = 18$ и $r = 2$

Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в листа за отговори!

Задача 21. Стойността на израза $\dfrac{3^{\frac{3}{4}} + 5^{\frac{3}{4}}}{3^{\frac{1}{2}} - (3 \cdot 5)^{\frac{1}{4}} + 5^{\frac{1}{2}}} - \left(\dfrac{3^{0,25} - 5^{0,25}}{3^{\sqrt{0,25}} - 5^{\sqrt{0,25}}}\right)^{-1}$ е равна на:

Задача 22. Решенията на уравнението $x = \sqrt{16 - 6x - x^2} - 2$ са:

Задача 23. Финансова институция предлага годишни влогове при 10% годишна лихва с планове както за просто, така и за сложно олихвяване на внесената сума, което се извършва в края на всеки период. Съпрузи едновременно открили два влога - единият на името на жената за 1010 лв. при проста лихва, а другият на името на мъжа за 1000 лв. при сложна лихва. След колко години сумата на мъжа ще стане по-голяма от сумата на жената (по тези конкретни влогове) и с колко лева?

Задача 24. В школа по математика учат 14 деца, средната възраст на които е 12 години. След влизането на преподавателя, средната възраст на хората в стаята нараснала с 3 години. На колко години е преподавателят?

Задача 25. Даден е триъгълник ΔABC със страни $AB = 15$, $BC = 14$, $CA = 13$. Да се намери дължината на вписаната в триъгълника окръжност.

Пълните решения на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за решения!

Задача 26. Да се реши системата $\left| \begin{array}{l} (x - y)xy^2 = 90 \\ (x + y)xy^2 = 360 \end{array} \right.$.

Задача 27. На щанд за сладолед се предлагат: ванилов, бананов, кокосов, шоколадов и сладолед с вкус на горски плодове, както и няколко вида сироп: ягодов, малинов, боровинков и карамелов. Колко възможности за избор има родител, който купува за детето си порция сладолед, включваща: по една топка от три различни вида сладолед, покрити с два различни вида сироп, поставени във вафлена фуния или в чашка с лъжичка? Каква е вероятността детето да получи бананов сладолед с карамелов сироп във вафлена фуния?

Задача 28. Диагоналите AC и BD на вписан в окръжност четириъгълник $ABCD$, със страни $AB = 7$, $BC = 5$, $CD = 7$ и $DA = 3$, се пресичат в точка O. Да се намерят дължините на отсечките AO, BO, CO и DO.

Време за работа 4 часа.

Драги кандидат-студенти,

- *номерирайте всички страници на беловата си;*
- *означавайте ясно началото и края на решението на всяка от задачите от 26. до 28. включително;*
- *решението на всяка от задачите от 26. до 28. включително трябва да започва на нова страница;*
- *не смесвайте белова и чернова;*
- *черновата не се проверява и не се оценява.*

Изпитната комисия ви пожелава успешна работа!