СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА II
16 юни 2019 г.

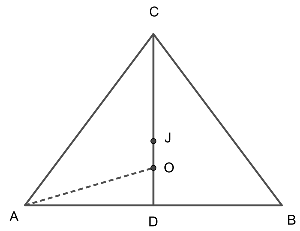
Тема №3.

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

Задача 1. Дадена е геометрична прогресия $\div\, a_1, a_2, \dots, a_{2019}$, за която $a_1 \cdot a_{2019} = 2019$. Да се намери частното от сумата на членовете на прогресията и сумата от реципрочните им стойности.

Решение: Нека геометричната прогресия $\div\, a_1, a_2, \dots$ има частно q, тогава редицата $\dfrac{1}{a_1}, \dfrac{1}{a_2}, \dots$ също е геометрична прогресия, но с частно $\dfrac{1}{q}$. Сега от формулата за сума на геометрична прогресия имаме $S_{2019} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2019} = a_1(1 + q + q^2 + \cdots + q^{2018}) = a_1\dfrac{1-q^{2019}}{1-q}$, $\widetilde{S}_{2019} = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_{2019}} = \dfrac{1}{a_1}\left(1 + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q^2} + \cdots + \dfrac{1}{q^{2018}}\right) = \dfrac{1}{a_1} \cdot \dfrac{1 - \frac{1}{q^{2019}}}{1 - \frac{1}{q}}$. Така за частното $\dfrac{S_{2019}}{\widetilde{S}_{2019}}$ получаваме $\dfrac{S_{2019}}{\widetilde{S}_{2019}} = a_1^2\, q^{2018} = a_1 \cdot a_{2019} = 2019$.

Задача 2. Даден е триъгълник ABC, за който $AC = BC = 5$ и $AB = 6$. Да се намерят радиусите r и R съответно на вписаната в триъгълника и на описаната около него окръжности, както и разстоянието между центровете им.

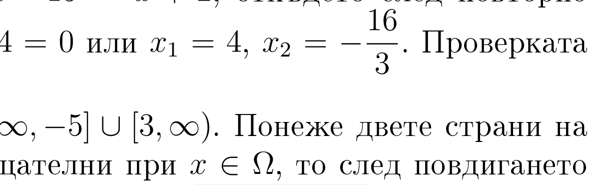


Решение: Нека D е средата на AB, тогава CD е медиана, височина и ъглополовяща в триъгълника ABC. Сега от теоремата на Питагор за триъгълника ADC получаваме $h = CD = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Така от формулите $p = \dfrac{AB + BC + CA}{2} = 8$ и $S_{ABC} = \dfrac{AB \cdot h}{2} = 12 = p \cdot r$ имаме $r = \dfrac{3}{2}$. Нека точките J и O са съответно центровете на вписаната и описаната за триъгълника ABC окръжности. За правоъгълния триъгълник ADO имаме $AD = 3$, $AO = R$, $DO = CD - CO = h - R$ и $R^2 = 3^2 + (4-R)^2$ или $R = \dfrac{25}{8}$. Така за отсечката OJ имаме $OJ = DJ - DO = r - (h - R) = r + R - h = \dfrac{5}{8}$. $\Big($За намиране на R може да се използва и формулата $S = \dfrac{abc}{4R}$. $\Big)$

Задача 3. Да се реши уравнението $\sqrt{x^2+5x} - \sqrt{x^2+2x-15} = 3$.

Решение: Записваме ирационалното уравнение във вида $\sqrt{x^2+5x} = \sqrt{x^2+2x-15} + 3$.
I. След повдигане на квадрат получаваме $2\sqrt{x^2+2x-15} = x + 2$, откъдето след повторно повдигане на втора степен достигаме до $3x^2 + 4x - 64 = 0$ или $x_1 = 4$, $x_2 = -\dfrac{16}{3}$. Проверката показва, че само $x = 4$ е решение на задачата.
II. Даденото уравнение има смисъл при $x \in \Omega \equiv (-\infty, -5] \cup [3, \infty)$. Понеже двете страни на уравнението $\sqrt{x^2+5x} = \sqrt{x^2+2x-15} + 3$ са неотрицателни при $x \in \Omega$, то след повдигането им на втора степен достигаме до еквивалентното му уравнение $2\sqrt{x^2+2x-15} = x + 2$. Двете страни на $2\sqrt{x^2+2x-15} = x+2$ са неотрицателни при $x \in \Omega_1 \equiv \Omega \cap \{x \geqq -2\} \equiv [3, \infty]$ и след повдигане на квадрат получаваме квадратното уравнение $3x^2 + 4x - 64 = 0$ $\Big($с корени $x_1 = 4$, $x_2 = -\dfrac{16}{3}\Big)$, което е еквивалентно на даденото ирационално уравнение. Тъй като $x_1 \in \Omega_1$, а $x_2 \notin \Omega_1$, то само $x = 4$ е решение на задачата.

Задача 4. Даден е правоъгълник $ABCD$ със страна $AB = 10$. Върху страната CD е избрана точка M, така че $S_{BCM} = 4$, $\sphericalangle BAM = \alpha$, $\sphericalangle ABM = \beta$ и $\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta = 2 : 3$. Да се намерят лицето S на правоъгълника и радиусът R на описаната около триъгълника ABM окръжност.



Решение: В правоъгълните триъгълници ADM и BCM имаме $\sphericalangle AMD = \sphericalangle BAM = \alpha$,

$\sphericalangle BMC = \sphericalangle ABM = \beta$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{AD}{DM}$ и $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{BC}{CM}$. Така от $\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta = 2:3$ получаваме $\dfrac{CM}{MD} = \dfrac{2}{3}$. Сега, отчитайки $CD = CM + MD = 10$ и $S_{BCM} = 4$ достигаме до $CM = 4$, $MD = 6$, $BC = 2$. Така за лицето S на правоъгълника имаме $S = AB \cdot BC = 20$, освен това $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{3}$ и $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{2}$. Ъглите α и β са остри и $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = 1$, откъдето последователно получаваме $\alpha + \beta = 45^\circ$ и $\sphericalangle AMB = 135^\circ$. Сега от синусувата теорема за триъгълника ABM пресмятаме $R = \dfrac{AB}{2\sin 135^\circ} = 5\sqrt{2}$.

Задача 5. Да се реши неравенството $\left(9 - 4\sqrt{5}\right)^{2\sin x} + 1 \geqq 18\left(\sqrt{5}-2\right)^{2\sin x}$.

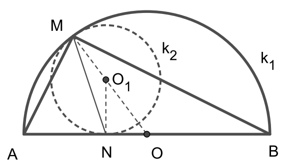
Решение: Въвеждаме ново неизвестно $t = \left(\sqrt{5}-2\right)^{2\sin x}$, тогава неравенството добива вида $t^2 - 18t + 1 \geqq 0$ или $t \in \left(-\infty, 9 - 4\sqrt{5}\,\right] \cup \left[9 + 4\sqrt{5}, \infty\right)$. Понеже $9 - 4\sqrt{5} = \left(\sqrt{5}-2\right)^2$ и $9 + 4\sqrt{5} = \left(\sqrt{5}-2\right)^{-2}$, то за неизвестното x получаваме два случая $\left(\sqrt{5}-2\right)^{2\sin x} \leqq \left(\sqrt{5}-2\right)^2$ или $\left(\sqrt{5}-2\right)^{2\sin x} \geqq \left(\sqrt{5}-2\right)^{-2}$. От неравенството $0 < \sqrt{5} - 2 < 1$ следва, че функцията $\left(\sqrt{5}-2\right)^y$ е намаляваща, освен това е изпълнено $-1 \leqq \sin x \leqq 1$. Така във всеки от случаите последователно имаме:

I. $\left(\sqrt{5}-2\right)^{2\sin x} \leqq \left(\sqrt{5}-2\right)^2$, $2\sin x \geqq 2$ или $\sin x = 1$, т.е. $x = (4k+1)\dfrac{\pi}{2}$, където $k \in \mathbb{Z}$;

II. $\left(\sqrt{5}-2\right)^{2\sin x} \geqq \left(\sqrt{5}-2\right)^{-2}$, $2\sin x \leqq -2$ или $\sin x = -1$, т.е. $x = (4k-1)\dfrac{\pi}{2}$, където $k \in \mathbb{Z}$.

След обединяване на двата случая окончателно получаваме $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, където $k \in \mathbb{Z}$.

Задача 6. Дадена е отсечка $AB = \sqrt{5}$. С диаметър AB е построена полуокръжност k_1. Окръжност k_2 се допира до AB в точка N ($N \in AB$ и $AN : NB = 1 : 2$) и вътрешно до k_1 в точката M. Да се намерят дължините на отсечките AM и BM.

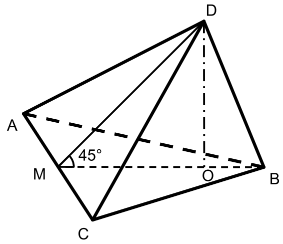


Решение: Нека точките O и O_1 са съответно центровете на k_1 и k_2, тогава триъгълникът NOO_1 е правоъгълен с ъгли $\sphericalangle NOO_1 = \alpha$ и $\sphericalangle NO_1O = \beta$.

I. В равнобедрените триъгълници MNO_1 и BMO имаме $\sphericalangle NMO_1 = \dfrac{\beta}{2}$ и $\sphericalangle OMB = \dfrac{\alpha}{2}$, т.е. $\sphericalangle NMB = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} = 45^\circ$ или MN е ъглополовяща в триъгълника ABM. От свойството на ъглополовящата и питагоровата теорема за триъгълника ABM имаме $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{AN}{NB} = \dfrac{1}{2}$, $AM^2 + BM^2 = AB^2$, откъдето окончателно получаваме $AM = 1$ и $BM = 2$.

II. От условията $AB = \sqrt{5}$ и $AN : NB = 1 : 2$ имаме $AN = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$, $AO = OM = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ и $NO = \dfrac{\sqrt{5}}{6}$. Нека означим с r радиусът на k_2, тогава за триъгълника NOO_1 имаме $O_1N = r$, $NO = \dfrac{\sqrt{5}}{6}$ и $OO_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{2} - r$, а след прилагане на теоремата на Питагор достигаме до $r^2 + \left(\dfrac{\sqrt{5}}{6}\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{2} - r\right)^2$ или $r = \dfrac{2\sqrt{5}}{9}$. Сега от триъгълника NOO_1 получаваме $\cos\alpha = \dfrac{NO}{OO_1} = \dfrac{3}{5}$. От косинусовата теорема за триъгълника AMO имаме $AM^2 = 2\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 2\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\cos\alpha = 1$, т.е. $AM = 1$, а от питагоровата теорема за триъгълника ABM намираме $BM = 2$.

Задача 7. Стените ACB и ACD на триъгълната пирамида $ABCD$ сключват помежду си ъгъл $45°$. Да се намери обемът на пирамидата, ако $AC = 14$, $AB = AD = 15$ и $CB = CD = 13$.



Решение: От хероновата формула за лицето на триъгълника ABC имаме $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 84$, където $p = \dfrac{a+b+c}{2} = 21$, $BC = a = 13$, $AC = b = 14$ и $AB = c = 15$. Понеже триъгълниците ACB и ACD са еднакви, то ъгълът $\sphericalangle BMD$ е линеен на двустенния ъгъл между стените ACB и ACD, където точката $M \in AC$ е такава, че $BM \perp AC$, $DM \perp AC$ и $BM = DM = 12 = \dfrac{2S_{ABC}}{AC}$. Имаме $\sphericalangle(ACB, ACD) = \sphericalangle BMD = 45°$ и триъгълникът ΔBDM е равнобедрен. Нека точка D се проектира върху равнината ACB в точка O ($DO \perp (ACB)$). Така телесната височина DO лежи в равнината (MBD) и $DO \perp BM$, т.е. DO е катет в равнобедрения правоъгълен триъгълник ΔDMO с хипотенуза $DM = 12$ или $DO = 6\sqrt{2}$. Сега за обема получаваме $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot DO = \dfrac{1}{3} \cdot 84 \cdot 6\sqrt{2} = 168\sqrt{2}$.

Задача 8. Даден е квадратният тричлен $f(x) = 8a^2x^2 + 8ax - a + 1$, където a е реален параметър. Да се намери a, при условие че уравнението $f(x) = 0$ има два различни реални корена α и β, за които $5\alpha - 3\beta = 1$.

Решение: Ако $a = 0$, то уравнението $f(x) = 0$ няма корени. При $a \neq 0$ от формулите на Виет имаме, че $\left| \begin{array}{l} \alpha + \beta = -\dfrac{1}{a} \\ \alpha\beta = \dfrac{1-a}{8a^2} \end{array} \right.$ точно когато α и β са корени на $f(x) = 0$. Добавяме условието $5\alpha - 3\beta = 1$ и получаваме $\left| \begin{array}{l} \alpha + \beta = -\dfrac{1}{a} \\ \alpha\beta = \dfrac{1-a}{8a^2} \\ 5\alpha - 3\beta = 1 \end{array} \right.$. От първото и третото уравнение изразяваме α и β чрез a и ги заместваме във второто. Последователно имаме $\left| \begin{array}{l} \alpha + \beta = -\dfrac{1}{a} \\ 5\alpha - 3\beta = 1 \end{array} \right.$, $\left| \begin{array}{l} \alpha = \dfrac{a-3}{8a} \\ \beta = -\dfrac{a+5}{8a} \end{array} \right.$, $\dfrac{a-3}{8a} \cdot \dfrac{-a-5}{8a} = \dfrac{1-a}{8a^2}$, $(a-3)(-a-5) = 8(1-a)$, $a^2 - 6a - 7 = 0$ или $a = -1$, $a = 7$. Така получаваме, че корените на $f(x) = 0$ удовлетворяват условието $5\alpha - 3\beta = 1$ точно когато

$$\left| \begin{array}{l} a = -1 \\ \alpha = \dfrac{a-3}{8a} = \dfrac{1}{2} \\ \beta = -\dfrac{a+5}{8a} = \dfrac{1}{2} \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left| \begin{array}{l} a = 7 \\ \alpha = \dfrac{a-3}{8a} = \dfrac{1}{14} \\ \beta = -\dfrac{a+5}{8a} = -\dfrac{3}{14} \end{array} \right. .$$

Понеже при $a = -1$ имаме $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$, то само $a = 7$ е решение на задачата.