Софийски Университет „Св. Климент Охридски”
Факултет по математика и информатика

Национален турнир по елементарна математика

„Проф. Борислав Боянов”

Втори кръг, 17 март 2019

Задача 1. Безкрайна аритметична прогресия $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ се състои от различни естествени числа.

а) Възможно ли е измежду числата $a_1, a_2, \dots, a_7$ точно 3 да се делят на 100?

б) Възможно ли е измежду числата $a_1, a_2, \dots, a_{49}$ точно 11 да се делят на 100?

в) Да се намери най-голямото естествено число N, за което е възможно броят на числата измежду $a_1, a_2, \dots, a_{2N}$, делящи се на 100, да е по-голям от броя на числата измежду $a_{2N+1}, a_{2N+2}, \dots, a_{5N}$, делящи се на 100.

Задача 2. Да се намерят стойностите на параметъра b, за които уравнението

$$\sqrt{x^2+9} + 3|x| + b^2 - 2|x-2b| = 0$$

има решение.

Задача 3. Разстоянието от центъра на сферата, която се допира до всички ръбове на правилна четириъгълна пирамида, до върха на пирамидата е равно на дължината на околния ръб. Да се намери отношението между основен и околен ръб на пирамидата.

Задача 4. Да се докаже, че за всяко естествено число $n \geq 2$ са изпълнени неравенствата

$$n\left(\sqrt[n]{n+1} - 1\right) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} + \frac{1}{n+1}\right).$$

Задача 5. Правоъгълен триъгълник, с дължини на страните естествени числа, се нарича „несъкратим”, ако дължините на страните му са взаимно прости числа.

а) Да се докаже, че всяко естествено число е дължина на радиуса на вписаната в „несъкратим” триъгълник окръжност.

б) Да се докаже, че съществува естествено число, което е дължина на радиуса на вписаната окръжност за поне 2019 различни „несъкратими” триъгълници.

Време за работа 5 часа.