*Софийски Университет „Св. Климент Охридски"*
***Факултет по математика и информатика***

*Национален турнир по елементарна математика*

## *„Проф. Борислав Боянов"*

*Втори кръг, 17 март 2019*

# Примерни решения

**Задача 1.** Безкрайна аритметична прогресия $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ се състои от различни естествени числа.

а) Възможно ли е измежду числата $a_1, a_2, \dots, a_7$ точно 3 да се делят на 100?

б) Възможно ли е измежду числата $a_1, a_2, \dots, a_{49}$ точно 11 да се делят на 100?

в) Да се намери най-голямото естествено число $N$, за което е възможно броят на числата измежду $a_1, a_2, \dots, a_{2N}$, делящи се на 100, да е по-голям от броя на числата измежду $a_{2N+1}, a_{2N+2}, \dots, a_{5N}$, делящи се на 100.

**Решение:** Ясно е, че разликата $d$ на такава прогресия е естествено число. Всяко едно от подусловията се отнася до прогресии, които имат поне един член, делящ се на 100.

Полагаме

$$p = \min\{n \in \mathbb{N} : 100 \text{ дели } a_n\}\ ,\quad k = \min\{n \in \mathbb{N} : 100 \text{ дели } a_{p+n}\}\ .$$

От минималността следва, че $p \le k \le 100$, $k$ дели 100 и 100 дели $a_n$ тогава и само тогава, когато $n = p + (m-1)k$ за някое $m \in \mathbb{N}$. Броят на членовете, делящи се на 100 и с номера $M+1 \le n \le L$, $M+1 \in \mathbb{N}$, $L \in \mathbb{N}$, е или $\left[\dfrac{L-M}{k}\right]$, или $\left[\dfrac{L-M}{k}\right] + 1$.

а) **Да**, пример $a_n = 50n$.

б) **Не**. Броят $B$ на числата, измежду $a_1, a_2, \dots, a_{49}$ и делящи се на 100, удовлетворява $\left[\dfrac{49}{k}\right] \le B \le \left[\dfrac{49}{k}\right] + 1$. При $k \le 4$ имаме $B \ge 12$, а при $k \ge 5$ е изпълнено $B \le 10$.

в) **66.** За броя $B^*$ на числата, измежду $a_1, a_2, \dots, a_{2N}$ и делящи се на 100, и броя $B^{**}$ на числата, измежду $a_{2N+1}, a_{2N+2}, \dots, a_{5N}$ и делящи се на 100, имаме

$\left[\dfrac{3N}{k}\right] \le B^{**} < B^* \le \left[\dfrac{2N}{k}\right] + 1$. Понеже $\left[\dfrac{2N}{k}\right] \le \left[\dfrac{3N}{k}\right]$, то $\left[\dfrac{2N}{k}\right] = \left[\dfrac{3N}{k}\right]$.

Тогава $\dfrac{N}{k} = \dfrac{3N}{k} - \dfrac{2N}{k} < 1$, откъдето $\dfrac{2N}{k} < 2$, т.е. $\left[\dfrac{3N}{k}\right] = \left[\dfrac{2N}{k}\right] \le 1$.

Следователно $\dfrac{3N}{k} < 2$, което е $N < \dfrac{2k}{3}$, и понеже $k \le 100$, $N \le 66$.

За прогресията $a_n = 68 + n$ числата, измежду $a_1, a_2, \dots, a_{132}$ и делящи се на 100, са две: $a_{32} = 100$ и $a_{132} = 200$, а измежду $a_{133}, a_{134}, \dots, a_{330}$ има само едно, делящо се на 100, $a_{232} = 300$.

**Задача 2.** Да се намерят стойностите на параметъра $b$, за които уравнението

$$\sqrt{x^2+9} + 3|x| + b^2 - 2|x - 2b| = 0$$

има решение.

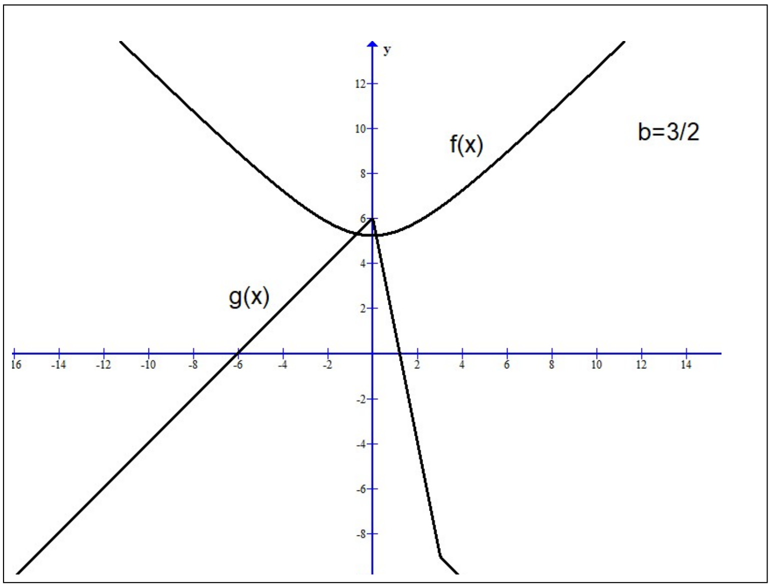
**Решение:** За $b = 0$ уравнението няма решение. Ако за $b = b_0 \neq 0$ уравнението има решение $x_0$, то $-x_0$ е решение на уравнението за $b = -b_0$. Следователно, достатъчно е да намерим положителните стойности на $b$, за които уравнението има решение, т.е. предполагаме, че $b > 0$.

Понеже $x^2 \geq 0$ и $\sqrt{t}$ е растяща функция, то за функцията $f(x) = \sqrt{x^2 + 9} + b^2$ имаме $f(x) \geq 3 + b^2 = f(0)$.

От друга страна, функцията

$$g(x) = 2\,|x - 2b| - 3\,|x| = \begin{cases} x + 4b & \text{за} \quad x \leq 0 \\ -5x + 4b & \text{за} \quad 0 \leq x \leq 2b \\ -x - 4b & \text{за} \quad 2b \leq x \end{cases}$$

расте в интервала $(-\infty,\, 0]$ и намалява в интервала $[0,\, +\infty)$. Следователно $g(x) \leq g(0)$.



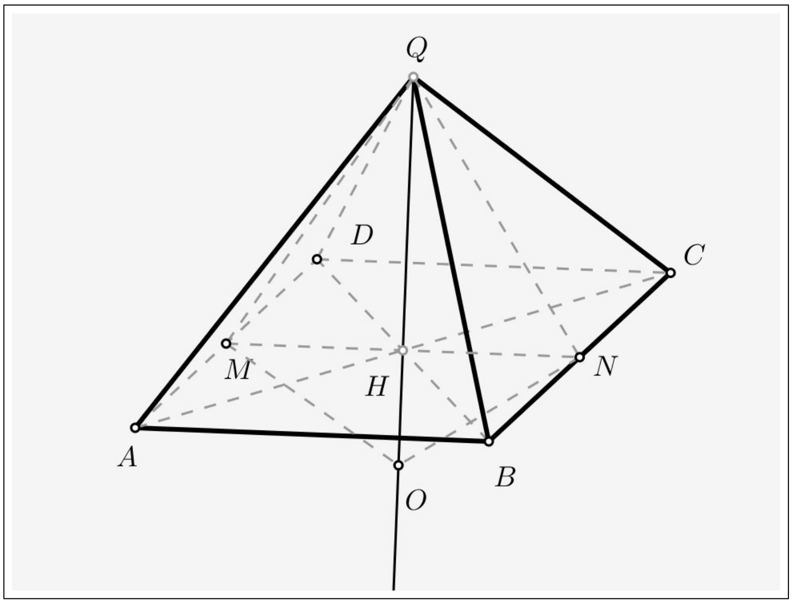

Ако уравнението $f(x) = g(x)$ (еквивалентно на даденото) има решение $x_0$, то $f(0) \leq f(x_0) = g(x_0) \leq g(0)$. Обратно, ако $f(0) \leq g(0)$, то уравнението $f(x) = g(x)$ има решение защото $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, а $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати функции.

Решенията на неравенството $b^2 + 3 \leq 4b$ са $b \in [1,\, 3]$, следователно, всички търсени стойности са $b \in [-3,\, -1] \cup [1,\, 3]$.

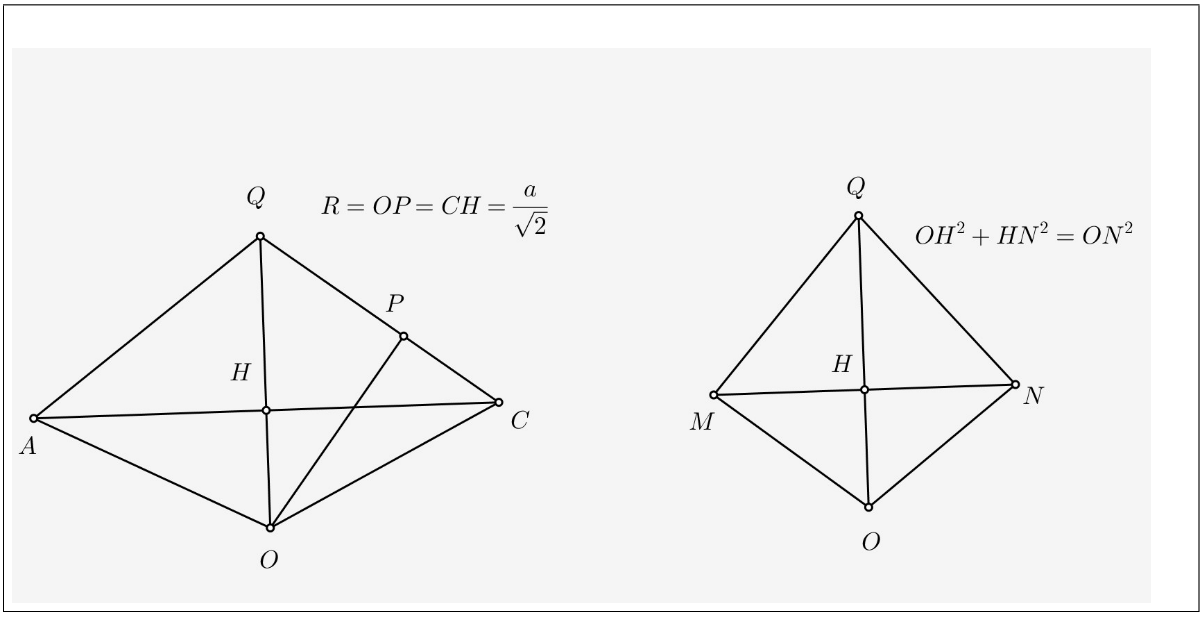
**Задача 3.** Разстоянието от центъра на сферата, която се допира до всички ръбове на правилна четириъгълна пирамида, до върха на пирамидата е равно на дължината на околния ръб. Да се намери отношението между основен и околен ръб на пирамидата.

**Решение:** Да означим $ABCD$ – квадрат, основа на пирамидата, $Q$ – връх на пирамидата, $H = AC \times BD$, $M$ – среда на $AD$, $N$ – среда на $BC$, $O$ – център на сферата, която се допира до всички ръбове, $R$ – радиус на същата сфера.

Множеството от точките, намиращи се на равни разстояния от правите $AB$ и $CD$, е равнината $MNQ$. Аналогично, множеството от точките, намиращи се на равни разстояния от правите $BC$ и $AD$, е равнината определена от $Q$ и средите на ръбовете $AB$ и $CD$. Следователно, $O$ лежи на лъча $QH^{\rightarrow}$, точките от който се намират на равни разстояния от правите $AQ$, $BQ$, $CQ$, $DQ$. Имаме още $ON = R$.




Нека $AB = a$, $AQ = l = ax$. Тогава $h = QH = \sqrt{AQ^2 - AH^2} = a\sqrt{x^2 - \dfrac{1}{2}}$. Ако $P$ е петата на перпендикуляра от $O$ към $CQ$, то триъгълниците $QOP$ и $QCH$ са еднакви (защото $QO = QC$) и, следователно, $R = OP = CH = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.




От правоъгълния $\triangle OHN$ намираме $R^2 = ON^2 = OH^2 + HN^2 = (l-h)^2 + \dfrac{a^2}{4}$, или $\dfrac{a^2}{2} = a^2\left(x - \sqrt{x^2 - \dfrac{1}{2}}\right)^2 + \dfrac{a^2}{4}$, откъдето $x - \sqrt{x^2 - \dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$. Последното уравнение има единствено решение $x = \dfrac{3}{4}$.

Следователно, $AB : AQ = 4 : 3$.

**Задача 4.** Да се докаже, че за всяко естествено число $n \geq 2$ са изпълнени неравенствата

$$n\left(\sqrt[n]{n+1} - 1\right) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} + \frac{1}{n+1}\right).$$

**Решение:** Лявото неравенство е еквивалентно на

$$\sqrt[n]{n+1} < \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)+1 = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}\right),$$

което е неравеството между средното геометрично и средното аритметично на числата $\dfrac{k+1}{k}$, $1 \le k \le n$ (поне две различни), защото $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k} = n+1$.

Аналогично, дясното неравенство е еквевалентно на

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} < 1-\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=2}^{n+1}\frac{k-1}{k}\right),$$

което е неравеството между средното геометрично и средното аритметично на числата $\dfrac{k-1}{k}$, $2 \le k \le n+1$ (поне две различни), защото $\displaystyle\prod_{k=2}^{n+1}\frac{k-1}{k} = \frac{1}{n+1}$.

**Задача 5.** Правоъгълен триъгълник, с дължини на страните естествени числа, се нарича „несъкратим", ако дължините на страните му са взаимно прости числа.

а) Да се докаже, че всяко естествено число е дължина на радиуса на вписаната в „несъкратим" триъгълник окръжност.

б) Да се докаже, че съществува естествено число, което е дължина на радиуса на вписаната окръжност за поне 2019 различни „несъкратими" триъгълници.

**Решение:** За всеки две естествени числа $m < n$ числата $c = m^2 + n^2$, $a = 2mn$, $b = n^2 - m^2$ са дължини на страните на правоъгълен триъгълник, защото $\left(m^2+n^2\right)^2 = (2mn)^2 + \left(n^2-m^2\right)^2$. Радиусът на вписаната в такъв триъгълник окръжност е $r = \dfrac{a+b-c}{2} = m(n-m)$.

а) За $k \in \mathbb{N}$ полагаме $n = k+1$ и $m = k$. Тогава $r = k$. Числата $c = 2k^2+2k+1$ и $a = 2k^2+2k$ са взаимно прости, защото $c-a = 1$. Следователно, триъгълникът със страни $c = 2k^2+2k+1$, $a = 2k^2+2k$ и $b = 2k+1$ е „несъкратим".

б) Нека $p_1, p_2, \dots p_s$ са различни нечетни прости числа, $k = \displaystyle\prod_{i=1}^{s} p_i$.

Ще покажем, че $k$ е радиус на поне $2^s$ различни „несъкратими" триъгълника (така твърдението се получава за $s = 11$). За $A \subset \{1, 2, \dots s\}$ полагаме $A^* = \{1, 2, \dots s\} \setminus A$, $P = \displaystyle\prod_{i \in A} p_i$, $Q = \displaystyle\prod_{i \in A^*} p_i$ (ако $A = \emptyset$ или $A^* = \emptyset$, съответното произведение е 1).

Числата $c = 2P^2+2PQ+Q^2$ и $a = 2P^2+2PQ$ са взаимно прости. Наистина, разликата им е $Q^2$, което означава, че ако те имат общ делител $d > 1$, то простите делители на $d$ са някои измежду $p_i$, $i \in A^*$. От това следва, че за някое $i \in A^*$ числото $p_i$ дели $P$, което е противоречие.

Следователно, за всяко $A \subset \{1, 2, \dots s\}$ триъгълникът със страни $c = 2P^2+2PQ+Q^2$, $a = 2P^2+2PQ$ и $b = 2PQ+Q^2$ е „несъкратим" с радиус на вписаната окръжност $r = PQ = k$. За различни подмножества получаваме различни триъгълници, а броят на подмножествата е $2^s$.