Софийски Университет „Св. Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика

Национален турнир по елементарна математика

„Проф. Борислав Боянов"

Първи кръг, 17 февруари 2019

Примерни решения

Задача 1. Да се реши неравенството:

$$\frac{5}{x^2-8} - \frac{2}{x^2-4} \le 1 \quad .$$

Решение: Неравенството е еквивалентно на

$$\frac{-x^4+15x^2-36}{(x^2-8)(x^2-4)} \le 0 \quad \text{или} \quad \frac{x^4-15x^2+36}{(x^2-8)(x^2-4)} \ge 0 \, .$$

Числителят е:

$$x^4-15x^2+36 = (x^2-3)(x^2-12) = \left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-2\sqrt{3}\right)\left(x+2\sqrt{3}\right) \, ,$$

а знаменателят –

$$\left(x^2-4\right)\left(x^2-8\right) = (x-2)(x+2)\left(x-2\sqrt{2}\right)\left(x+2\sqrt{2}\right) \, .$$

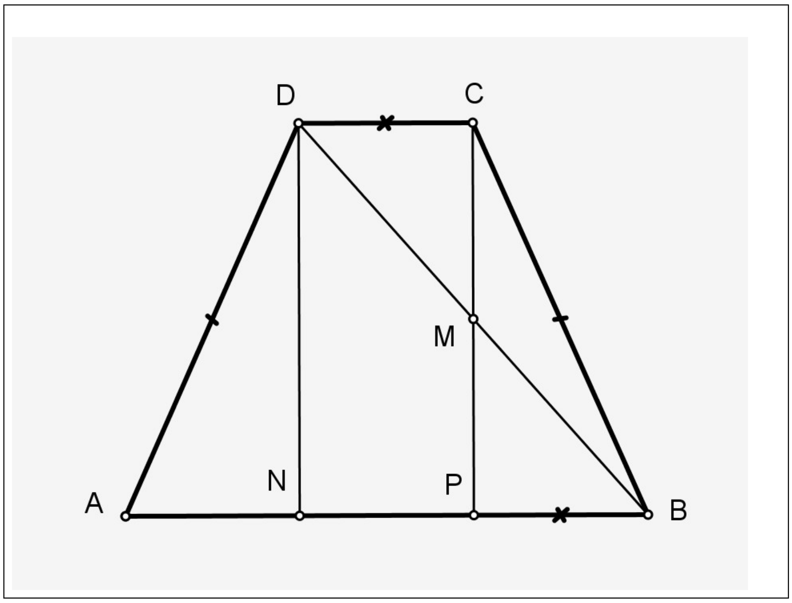
Следователно, решенията на неравенството са:

$$\left(-\infty, -2\sqrt{3}\right] \cup \left(-2\sqrt{2}, -2\right) \cup \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right] \cup \left(2, 2\sqrt{2}\right) \cup \left[2\sqrt{3}, +\infty\right) \, .$$

Задача 2. В равнобедрен трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $BC = AD$) е изпълнено $AB = 3CD$. Да се намери CM, където M е средата на BD, ако $AB = 15$ и $BC = 13$.

Решение: Нека $N \in AB$ и $P \in AB$ са петите на перпендикулярите към AB, спуснати към AB съответно от D и C. Тогава $NP = DC$ и, понеже $AD = BC$, то $AN = PB$. От условието $AB = 3CD$ намираме $PB = CD$. Следователно, $PBCD$ е успоредник. Тъй като диагоналите му PC и BD се разполовяват, а M е среда на BD, то M е среда и на PC. От правоъгълния $\triangle PBC$ пресмятаме $PC = 12$.

Отговор: $CM = 6$.



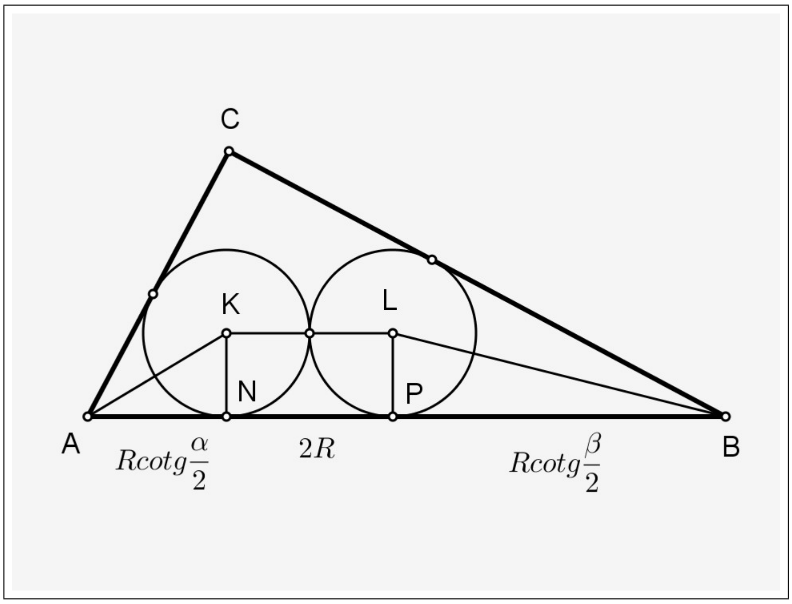
Задача 3. Да се реши уравнението:

$$\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1 \quad .$$

Решение: Полагаме $y = \sqrt[3]{x-3}$. Уравнението се трансформира в $\sqrt[3]{y^3+37} = y+1$, еквивалентно на $y^3+37 = (y+1)^3$. След опростяване получаваме $y^2+y-12 = 0$ с корени -4 и 3. Отговор: -61 и 30.

Задача 4. В правоъгълен триъгълник $\triangle ABC$ катетите са $AC = 8$ и $BC = 15$. Две окръжности, с радиус R, се допират помежду си, допират се до хипотенузата и до катет на $\triangle ABC$ (едната до AC, другата до BC). Да се намери R.

Решение: Нека K е центърът на окръжността, допираща се до AC, а L е центърът на допиращата се до BC окръжност, N и P са допирните им точки с AB.



Тогава $NPLK$ е правоъгълник, откъдето $NP = KL = 2R$. От друга страна, AK е ъглополовяща на $\sphericalangle BAC$, а BL – на $\sphericalangle ABC$. Следователно, $AN = R\operatorname{cotg}\dfrac{\alpha}{2}$ и $BL = R\operatorname{cotg}\dfrac{\beta}{2}$ (използваме стандартните означения). Имаме

$$c = \sqrt{a^2+b^2} = 17\,,\ \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{a}{c-b} = \frac{5}{3}\,,\ \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} = \frac{\sin\beta}{1-\cos\beta} = \frac{b}{c-a} = 4\,.$$

Тогава $17 = AB = AN + NP + PB = \dfrac{5}{3}R + 2R + 4R$, откъдето $R = \dfrac{51}{23}$.

Задача 5. Да се реши уравнението $\operatorname{tg} x + \sin 2x = 2$.

Решение: Допустимите стойности са $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ за всяко цяло k.

Полагаме $y = \operatorname{tg} x$. Понеже $\sin 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, то уравнението се трансформира в $y + \dfrac{2y}{1+y^2} = 2$, еквивалентно на $y^3 - 2y^2 + 3y - 2 = 0$, т.е. $(y-1)\left(y^2-y+2\right) = 0$. Последното има единствено решение $y = 1$, откъдето $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, k – цяло.

Задача 6. Да се намери вероятността четири различни (произволно избрани) върха на правилна шестоъгълна призма да лежат в една равнина.

Решение: Четири различни върха на шестоъгълна призма могат да бъдат избрани по $C_{12}^4 = \dfrac{12.11.10.9}{1.2.3.4} = 495$ начина.

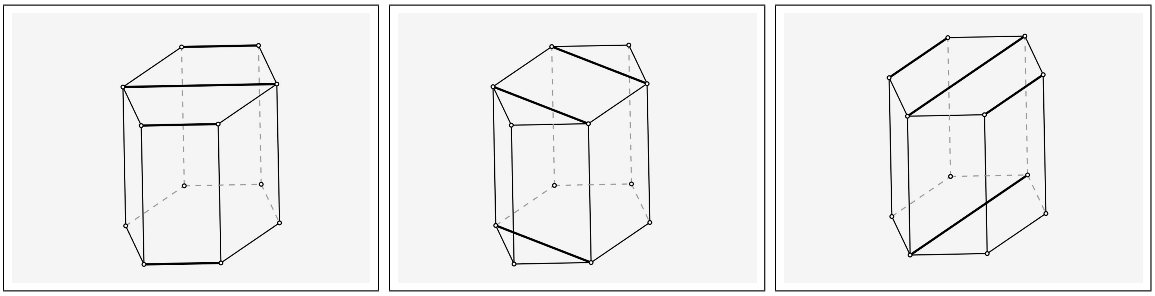
Ако четирите върха лежат в една равнина, то тази равнина

- или съвпада с равнината на една от основите,
- или пресича равнините на основите в успоредни прави.

В първия случай върховете могат да бъдат избрани по $2C_6^4 = 30$ начина.

Във втория случай във всяка от равнините на основите лежат по два от избраните върхове. За върховете в "долната" основа имаме следните възможности:

- върховете са съседни; има шест такива двойки и за всяка от тях има по три успоредни прави, минаващи през два върха на горната основа, т.е. възможните избори са 18
- между (по описаната окръжност) избраните върховете има един връх; има шест такива двойки и за всяка от тях има по две успоредни прави, минаващи през два върха на горната основа, т.е. възможните избори са 12
- между (по описаната окръжност) избраните върховете има два връх; има три такива двойки и за всяка от тях има по три успоредни прави, минаващи през два върха на горната основа, т.е. възможните избори са 9



Следователно, четири различни върха на правилна шестоъгълна призма, лежащи в една равнина, могат да бъдат избрани по 69 начина, което означава, че търсената вероятност е $\dfrac{69}{495} = \dfrac{23}{165}$.

Задача 7. Да се реши неравенството

$$\frac{\log_{x+5}\left(x^2+2x+56\right)}{\log_{x+5}\left(x^2+2x-2\right)} \geq \frac{\log_5\left(x^4+4x^3+4x^2\right)}{\log_5\left(x^2+2x-2\right)} \ .$$

Решение: Допустимите стойности са решенията на системата:

$$\left|\begin{array}{l} x^2+2x+56>0 \\ \left(x^2+2x\right)^2 = x^4+4x^3+4x^2>0 \\ x^2+2x-2>0\,,\ x^2+2x-2\neq 1 \\ x+5>0\,,\ x+5\neq 1 \end{array}\right. \quad \text{, или}$$

$x \in (-5,\,-4) \cup (-4,\,-3) \cup \left(-3,\,-1-\sqrt{3}\right) \cup \left(-1+\sqrt{3}\,,\,1\right) \cup (1,\,+\infty)$. С използване на тъждеството $\dfrac{\log_c b}{\log_c a} = \log_a b$ и полагане $y = x^2 + 2x$ неравенството се преобразува до

$$\log_{y-2}(y+56) \ge \log_{y-2} y^2 \quad \text{или} \quad \log_{y-2} \frac{y+56}{y^2} \ge 0\,.$$

Последното е еквивалентно на системата:

$$\left|\begin{array}{l} y-2>0\,,\ y-3 \ne 0\,,\ \dfrac{y+56}{y^2} > 0 \\ \\ (y-3)\left(\dfrac{y+56}{y^2} - 1\right) \ge 0 \end{array}\right. \quad ,\ \text{с решения} \quad y \in (3,\,8]\ .$$

Системата $3 < x^2 + 2x \le 8$ има решения $x \in [-4,\,-3) \cup (1,\,2]$. Понеже -4 не е допустима стойност, окончателно получаваме $x \in (-4,\,-3) \cup (1,\,2]$.

Задача 8. Да се намерят стойностите на параметъра a, за всяка от които уравнението

$$x^6 + (5a - 8\,|x|\,)^3 + 3x^2 - 24\,|x| + 15a = 0$$

има точно два различни корена.

Решение: Полагаме $z = 5a - 8\,|x|$. Уравнението е $\left(x^2\right)^3 + z^3 + 3x^2 + 3z = 0$ или $\left(x^2+z\right)\left(x^4 - x^2 z + z^2 + 3\right) = 0$. Имаме

$$x^4 - x^2 z + z^2 + 3 = \left(x^2 - \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3z^2}{4} + 3 > 0\,.$$

Следователно, уравнението в условието е еквивалентно на $x^2 - 8\,|x| + 5a = 0$. Ако x_0 е корен на последното, то $-x_0$ също е негов корен, което означава, че то има точно два различни корена тогава и само тогава, когато 0 не е корен на уравнението $x^2 - 8x + 5a = 0$ и то има точно един положителен корен. Първото означава, че $a \ne 0$. Второто е изпълнено в два случая:

- $a = \dfrac{16}{5}$ – двоен корен 4
- $a < 0$ – един положителен и един отрицателен корен

Отговор: $a \in (-\infty,\,0) \cup \left\{\dfrac{16}{5}\right\}$.