**СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“**

**ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА II**

*21 юни 2020 г.*

# Тема №3.

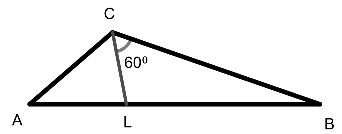
## ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

**Задача 1.** Дадена е аритметична прогресия. Да се намери сумата на първите ѝ двадесет члена, при условие че сумата на третия, седмия, четирнадесетия и осемнадесетия ѝ членове е равна на 404.

**Решение:** I. Нека първият член на прогресията и нейната разлика са съответно $a_1$ и $d$. Тогава от условието имаме $a_3 + a_7 + a_{14} + a_{18} = (a_1 + 2d) + (a_1 + 6d) + (a_1 + 13d) + (a_1 + 17d) = 4a_1 + 38d = 404$, т.е. $2a_1 + 19d = 202$. Тогава за сумата на първите двадесет члена получаваме $S_{20} = \dfrac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = 10 \cdot (2a_1 + 19d) = 2020$.

II. От свойството на аритметичната прогресия имаме $a_1 + a_{20} = a_2 + a_{19} = a_3 + a_{18} = \cdots = a_7 + a_{14} = \cdots$, т.е. $a_k + a_{20-k+1} = A$, където $k \in \{1, 2, \ldots, 10\}$. Сега имаме $a_3 + a_7 + a_{14} + a_{18} = 2A = 404$ и $S_{20} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{19} + a_{20} = 10A$. Така окончателно получаваме $A = 202$ и $S_{20} = 2020$.

**Задача 2.** В триъгълника $ABC$ е построена ъглополовящата $CL = 1$. Да се намери дължината на страната $AB$, при условие че $AC : BC = 1 : 2$ и $\sphericalangle LCB = 60^\circ$.

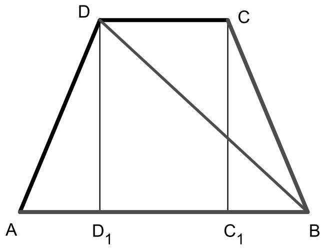



**Решение:** От факта, че $CL$ е ъглополовяща в триъгълника $ABC$ имаме $\sphericalangle ACL = \sphericalangle LCB = 60^\circ$, $\sphericalangle ACB = \gamma = 120^\circ$ и $AC : BC = AL : BL = 1 : 2$. Тогава $AC = x$, $BC = 2x$, $AL = y$, $BL = 2y$ и $CL = l_c = 1$. Сега от косинусовата теорема за триъгълниците $ALC$ и $LBC$ получаваме $y^2 = x^2 + 1 - 2x\cos 60^\circ$, $4y^2 = 4x^2 + 1 - 2 \cdot 2x \cos 60^\circ$ или $y^2 = x^2 - x + 1$, $4y^2 = 4x^2 - 2x + 1$. След умножаване на първото равенство по $(-4)$ и прибавяне към второто достигаме до $x = \dfrac{3}{2}$. Така от $y^2 = x^2 - x + 1$ получаваме $AL = y = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$. Понеже $AB = AL + BL = 3y$, то окончателно получаваме $AB = \dfrac{3\sqrt{7}}{2}$.

$\Bigg($За намиране на $AC$ може да се използва и формулата $l_c = \dfrac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$, а за пресмятане на $AB$ косинусова теорема за триъгълника $ABC\Bigg)$

**Задача 3.** Да се реши системата $\left| \begin{array}{l} x^2 + xy + 2y^2 = 8 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{array} \right.$.

**Решение:** След умножаване на първото уравнение по $(-9)$, а на второто по 8 и почленно събиране получаваме хомогенното уравнение $7x^2 - 9xy - 10y^2 = 0$. Ако $y = 0$, то от последното уравнение следва, че и $x = 0$. Така двойката $(0, 0)$ е решение на хомогенното уравнение, но не е решение на дадената система, следователно $y \neq 0$ и след разделяне на $y^2$ получаваме $7t^2 - 9t - 10 = 0$, където $t = \dfrac{x}{y}$. Решения на това уравнение са $t_1 = 2$, $t_2 = -\dfrac{5}{7}$. Така дадената система е еквивалентна на $\left| \begin{array}{l} x = 2y \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{array} \right.$ или $\left| \begin{array}{l} 7x + 5y = 0 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{array} \right.$. След заместване на $x = 2y$ и $x = -\dfrac{5}{7}y$ във второто уравнение на съответната система (т.е. в $2x^2 + y^2 = 9$) достигаме до $8y^2 + y^2 = 9$ или $2 \cdot \dfrac{25}{49}y^2 + y^2 = 9$, т.е. $y^2 = 1$ или $y^2 = \left(\dfrac{7\sqrt{11}}{11}\right)^2$. Така дадената система става еквивалентена на $\left| \begin{array}{l} x = 2y \\ y = 1 \end{array} \right.$ или $\left| \begin{array}{l} x = 2y \\ y = -1 \end{array} \right.$ или $\left| \begin{array}{l} 7x + 5y = 0 \\ y = \frac{7\sqrt{11}}{11} \end{array} \right.$ или $\left| \begin{array}{l} 7x + 5y = 0 \\ y = -\frac{7\sqrt{11}}{11} \end{array} \right.$, откъдето окончателно получаваме решенията на задачата: $(2, 1)$, $(-2, -1)$, $\left(-\frac{5\sqrt{11}}{11}, \frac{7\sqrt{11}}{11}\right)$, $\left(\frac{5\sqrt{11}}{11}, -\frac{7\sqrt{11}}{11}\right)$.

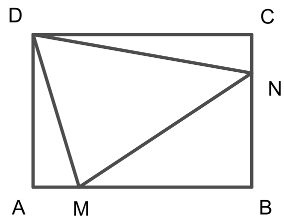



**Задача 4.** Трапец $ABCD$ с основи $AB = 18$ и $CD = 8$ е вписан в окръжност с радиус $R$ и описан около окръжност с радиус $r$. Да се намери лицето $S$ на трапеца и дължините на $R$ и $r$.

**Решение:** Понеже трапецът е вписан в окръжност, то той е равнобедрен. Сега от факта, че той е описан около окръжност имаме $AB + CD = AD + BC$, т.е. $AB = a = 18$ и $CD = b = 8$, $AD = BC = l = \dfrac{a+b}{2} = 13$. Нека $CC_1$ и $DD_1$ са височини в трапеца, тогава $AD_1 = BC_1 = \dfrac{a-b}{2} = 5$, $AC_1 = BD_1 = a - \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{a+b}{2} = 13$, $CC_1 = DD_1 = h = 2r$. От теоремата на Питагор за триъгълника $AD_1D$ получаваме $DD_1^2 = AD^2 - AD_1^2$ или $h^2 = 4r^2 = 13^2 - 5^2 = 144$, т.е. $h = 12$ и $r = 6$. Сега за лицето на трапеца имаме $S = \dfrac{a+b}{2} \cdot h = 13 \cdot 12 = 156$. От правоъгълните триъгълници $AD_1D$ и $BD_1D$ получаваме $\sin \sphericalangle D_1AD = \dfrac{DD_1}{AD} = \dfrac{12}{13}$ и $BD^2 = DD_1^2 + BD_1^2 = 12^2 + 13^2$, т.е. $BD = \sqrt{313}$. Понеже триъгълникът $ABD$ е вписан в същата окръжност както трапеца, то от синусовата теорема получаваме $2R = \dfrac{BD}{\sin \sphericalangle D_1AD} = \dfrac{\sqrt{313}}{\dfrac{12}{13}}$, т.е. $R = \dfrac{13\sqrt{313}}{24}$.

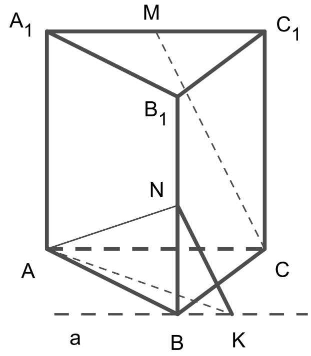
**Задача 5.** Да се реши уравнението $\log_{1-2x}(6x^2 - 5x + 1) - \log_{1-2x}(4x^2 - 4x + 1) = 2$.

**Решение:** Уравнението има смисъл при $\left\{1 - 2x > 0\right\} \cap \left\{1 - 2x \neq 1\right\} \cap \left\{6x^2 - 5x + 1 = (2x-1)(3x-1) > 0\right\} \cap \left\{4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2 > 0\right\}$, т.е. за $x \in \Omega \equiv (-\infty, 0) \cup \left(0, \dfrac{1}{3}\right)$. Сега даденото уравнение добива вида $\log_{1-2x} \dfrac{6x^2 - 5x + 1}{4x^2 - 4x + 1} = \log_{1-2x}(1-2x)^2$, което при $x \in \Omega$ е еквивалентно на $\dfrac{6x^2 - 5x + 1}{4x^2 - 4x + 1} = (1-2x)^2$. Понеже $2x - 1 \neq 0$ за $x \in \Omega$, то последователно получаваме $\dfrac{(2x-1)(3x-1)}{(2x-1)^2} = (1-2x)^2$, $\dfrac{3x-1}{2x-1} = (1-2x)^2$, $(1-2x)^3 + (3x-1) = 0$ или $8x^3 - 12x^2 + 3x = 0$. Решения на последното уравнение са $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$, $x_3 = \dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$. Очевидно имаме $x_1 = 0 \notin \Omega$, понеже $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{3}}{4} > \dfrac{3}{4} > \dfrac{1}{3}$, то получаваме, че $x_2 \notin \Omega$. От неравенствата $0 < \dfrac{3-\sqrt{3}}{4} < \dfrac{1}{3}$ $\left(0 < \dfrac{3-\sqrt{3}}{4} \Longleftrightarrow 3 > \sqrt{3} \Longleftrightarrow 9 > 3;\ \dfrac{3-\sqrt{3}}{4} < \dfrac{1}{3} \Longleftrightarrow 9 - 3\sqrt{3} < 4 \Longleftrightarrow 5 < 3\sqrt{3} \Longleftrightarrow 25 < 27\right)$ следва, че $x_3 = \dfrac{3-\sqrt{3}}{4} \in \Omega$. Така окончателно получаваме, че даденото логаритмично уравнение има единствено решение $x = \dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$.




**Задача 6.** Даден е правоъгълник $ABCD$. Точките $M$ и $N$ лежат съответно върху страните $AB$ и $BC$. Да се намери лицето $S_{MND}$ на триъгълника $MND$, при условие че лицата на триъгълниците $AMD$, $MBN$ и $NCD$ са съответно $S_{AMD} = 10$, $S_{MBN} = 28$ и $S_{NCD} = 12$.

**Решение:** Нека означим страните на правоъгълника и неговото лице съответно с $a = AB$, $b = AD$ и $S = a \cdot b$. От факта, че лицата на правоъгълните триъгълници $AMD$ и $NCD$ са съответно $S_{AMD} = 10$ и $S_{NCD} = 12$ имаме $AM = \dfrac{2S_{AMD}}{AD} = \dfrac{20}{b}$ и $CN = \dfrac{2S_{NCD}}{CD} = \dfrac{24}{a}$. Сега пресмятаме $MB = AB - AM = a - \dfrac{20}{b}$ и $BN = BC - CN = b - \dfrac{24}{a}$ и последователно получаваме $2S_{MBN} = MB \cdot BN$, $\left(a - \dfrac{20}{b}\right)\left(b - \dfrac{24}{a}\right) = 56$, $(ab - 20)(ab - 24) = 56ab$ и $(S - 20)(S - 24) = 56S$, т.е достигаме до $S^2 - 100S + 480 = 0$ или $S_{1,2} = 50 \pm \sqrt{2020}$. Понеже $S = S_{ABCD} > S_{AMD} + S_{MBN} + S_{NCD} = 10 + 28 + 12 = 50$, то $S = 50 + \sqrt{2020}$ и следователно $S_{MND} = S - (S_{AMD} + S_{MBN} + S_{NCD}) = S - 50 = \sqrt{2020}$.




**Задача 7.** Дадена е права триъгълна призма $ABCA_1B_1C_1$, всички ръбове на която са равни помежду си. Точките $M$ и $N$ са среди съответно на $A_1C_1$ и $BB_1$. Да се намери косинусът на ъгъла между правите $AN$ и $CM$.

**Решение:** Нека през точката $N$ построим права $NK$, такава че точката $K$ лежи в равнината $ABC$ и $NK$ е успоредна на $CM$. Понеже $BB_1 \parallel CC_1$ и $NK \parallel CM$, то равнииите $NBK$ и $ACC_1$ са успоредни и техните пресечници с равнината $ABC$ са успоредни помежду си, т.е. $K \in a$, където $B \in a$ и $a \parallel AC$. Така търсеният ъгъл $\varphi = \sphericalangle ANK$ лежи в триъгълника $AKN$.

Понеже $M$ и $N$ са среди и триъгълниците $BKN$ и $C_1MC$ са правоъгълни и подобни, то имаме $C_1M = 2BK = 2b$ , $CC_1 = 2BN = 4b$ и $CM = 2NK = 2(b\sqrt{5})$, където $BK = b$. Сега в триъгълника $AKB$ имаме $AB = 4b$, $BK = b$ и $\sphericalangle ABK = 120°$, следователно от косинусовата теорема имаме $AK^2 = 16b^2 + b^2 - 2 \cdot 4b \cdot b \cdot \cos 120° = 21\ b^2$, т.е. $AK = \sqrt{21}\ b$.

Така от косинусовата теорема за триъгълника $AKN$ окончателно получаваме
$\cos\varphi = \dfrac{AN^2 + KN^2 - AK^2}{2AN \cdot KN} = \dfrac{20\ b^2 + 5b^2 - 21\ b^2}{2 \cdot 2b\sqrt{5} \cdot b\sqrt{5}} = \dfrac{1}{5}.$

**Задача 8.** Дадена е функцията $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 6(a-1)x + 2020$, където $a$ е реален параметър. Да се намерят стойностите на $a$, така че за всяко $x \in [0,1]$ да е изпълнено неравенството $f(x) \geqq f(1)$.

**Решение:** Производната $f'(x) = 6x^2 - 6ax + 6(a-1)$ се анулира в точките $x_1 = 1$ и $x_2 = a-1$. Сега ще разгледаме възможните случаи на разположение на $x_2 = a-1$ спрямо интервала $[0,1]$.

**1.** Нека $x_2 \geqq x_1$, т.е. $a \geqq 2$. Тогава $f'(x) \geqq 0$ за $x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty)$, т.е. функцията $f(x)$ расте за $x \in [0,1]$ и неравенството $f(x) \geqq f(1)$ не може да бъде изпълнено за $x \in [0,1]$. Следователно в този случай няма стойности на параметъра, които да удовлетворяват условието на задачата.

**2.** Нека $x_2 \leqq 0$, т.е. $a \leqq 1$. Тогава $f'(x) \leqq 0$ за $x \in [x_2, x_1]$, т.е. функцията $f(x)$ намалява в интврвала $[0,1] \subset [x_2, x_1]$ и неравенството $f(x) \geqq f(1)$ е изпълнено в целия интервал $[0,1]$ . Следователно при $a \in (-\infty, 1]$ условието на задачата е удовлетворено.

**3.** Нека $x_2 \in (0,1)$, т.е. $a \in (1,2)$. Тогава $f'(x) \geqq 0$ за $x \in (-\infty, x_2] \cup [x_1, \infty)$, а $f'(x) \leqq 0$ за $x \in [x_2, x_1]$, т.е. функцията $f(x)$ расте за $x \in [0, x_2]$ и намалява за $x \in [x_2, 1]$. Неравенството $f(x) \geqq f(1)$ ще бъде изпълнено за $x \in [0,1]$ точно когато $f(0) \geqq f(1)$, т.е. когато $2020 = f(0) \geqq f(1) = 2 - 3a + 6(a-1) + 2020$, $3a - 4 \leqq 0$ или $a \leqq \dfrac{4}{3}$. Следователно в този случай получаваме, че при при $a \in \left(1, \dfrac{4}{3}\right]$ условието на задачата се удовлетворява.

След обединяване на трите случая окончателно получаваме, че търсените стойности на параметъра са $a \in \left(-\infty, \dfrac{4}{3}\right]$.