Софийски Университет „Св. Климент Охридски”
Факултет по математика и информатика

Национален турнир по елементарна математика

„Проф. Борислав Боянов”

Първи кръг, 23 февруари 2020

Примерни решения

Задача 1. Да се реши неравенството:

$$\left|\,2x^2-9x+10\,\right| < \left|\,x^2-x-5\,\right| \quad .$$

Решение: Понеже двете страни са неотрицателни, неравенството е еквивалентно на

$$\left(\,2x^2-9x+10\,\right)^2 < \left(\,x^2-x-5\,\right)^2 \text{ , или}$$

$$\left(\,3x^2-10x+5\,\right)\left(\,x^2-8x+15\,\right) < 0 \text{ . След разлагане}$$

$$(\,x-x_1\,)\,(\,x-x_2\,)\,(\,x-3\,)\,(\,x-5\,) < 0 \text{ , където}$$

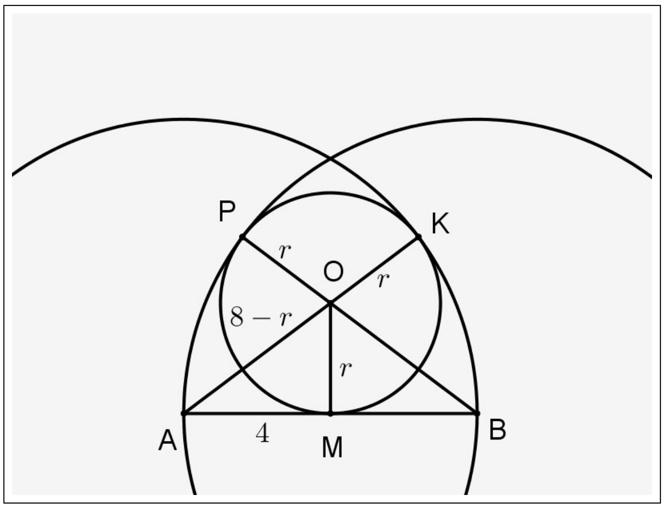
$$x_1=\frac{5-\sqrt{10}}{3} < x_2=\frac{5+\sqrt{10}}{3} < 3 < 5\ .$$

Следователно, решенията на неравенството са:

$$\left(\frac{5-\sqrt{10}}{3}\,,\ \frac{5+\sqrt{10}}{3}\right)\cup(3\,,\ 5)\ .$$

Задача 2. Окръжност, с център точката A, минава през точката B. Втора окръжност, с център точката B, минава през точката A. Да се намери дължината на радиуса на окръжност, която се допира до отсечката AB и до дадените две окръжности, ако $AB = 8$.

Решение: Нека окръжността, чийто радиус се търси, е с център O и радиус r и се допира до AB в M, до окръжността, с център A, в K и до окръжността, с център B, в P. Допирането до окръжностите е вътрешно и, следователно,
$AO = AK - OK = 8 - r$ и $BO = BP - OP = 8 - r$, т.е. $\triangle ABO$ е равнобедрен. Това означава, че M е среда на AB. Питагоровата теорема (за $\triangle AMO$) ни дава $(8-r)^2 = 4^2 + r^2$, откъдето $r = 3$.



Задача 3. Да се реши уравнението:

$$\sqrt[3]{x+40} - \sqrt{x-20} = 2 \quad .$$

Решение: Полагаме $y = \sqrt[3]{x+40}$. Уравнението се трансформира в $y-2 = \sqrt{y^3-60}$, с уравнение следствие $y^3-y^2+4y-64 = 0$. След разлагане получаваме $(y-4)\left(y^2+3y+16\right) = 0$ с единствен корен 4. Проверката показва, че 4 е корен на уравнението $y-2 = \sqrt{y^3-60}$. Следователно, решението на изходното уравнение е 24.

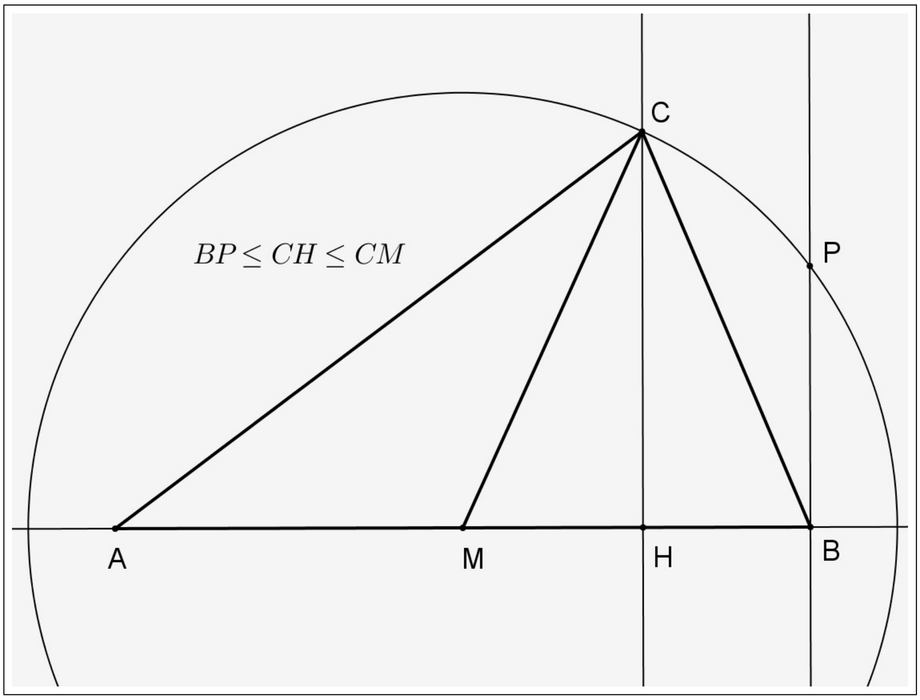
Задача 4. Мерките на ъглите на триъгълник ABC са не по-големи от $90°$. Да се намерят най-малката и най-голямата възможни стойности на лицето на $\triangle ABC$, ако $AB = 8$ и сумата от лицата на квадратите със страна AC и BC е 82.

Решение: Нека CH (H лежи върху правата AB) е височината през C. Понеже дължината на AB е фиксирана, то трябва да се намерят най-малката и най-голямата възможни стойности на CH . В триъгълник ABC няма тъпи ъгли, следователно H лежи върху отсечката AB , като е възможно да съвпада с A или с B.

Нека M е средата на AB . Тогава $4\,CM^2 = 2\,AC^2 + 2\,BC^2 - AB^2 = 2.82 - 64 = 100$, т.е. $CM = 5$. Понеже $CH \leq CM$, то най-голямата стойност на CH е 5 и се достига, когато H съвпада с M .

Поради симетрията, можем да предполагаме, че H лежи върху отсечката MB . Да означим с P пресечната точка на перпендикуляра към AB през B и окръжността, с център M и радиус 5 , която е в една полуравнина с C спрямо AB . Тогава $BP = 3$ и $CH \geq PB$, защото правоъгълните триъгълници MHC и MBP имат равни хипотенузи MC и MP , а $\sphericalangle HMC \geq \sphericalangle BMP$. Следователно, най-малката стойност на CH е 3 и се достига, когато H съвпада с B .

Окончателно, най-голямата възможна стойност на лицето на $\triangle ABC$ е 20 , а най-малката възможна стойност — 12 .



Задача 5. Да се намери броят на различните (не еднакви) правоъгълни триъгълници, чиито върхове са измежду върховете на правилен 2020-ъгълник.

Решение: Върховете на (всеки) правилен многоъгълник лежат на описаната около него окръжност. Следователно, триъгълник, с върхове измежду върховете на многоъгълника, е правоъгълен тогава и само тогава, когато два от върховете му са диаметрално противоположни точки. Нека върховете са A_k , $k = 1, 2, 3, \ldots, 2020$ (наредени в положителна посока по описаната окръжност). Приемаме уговорката $A_k \equiv A_{k-2020}$ за $k = 2021, 2022, 2023, \ldots, 4040$. Тогава правоъгълните триъгълници в задачата могат да бъдат записани така $A_p A_k A_{p+1010}$, $p < k < p + 1010$.

Измежду триъгълниците $A_1 A_k A_{1011}$, $k = 2, 3, \ldots, 506$ няма еднакви и те са 505 на брой.

Имаме още $\triangle A_1 A_k A_{1011} \cong \triangle A_1 A_{1012-k} A_{1011}$ за $k = 507, 508, \ldots, 1010$ (симетрични спрямо правата $A_{506} A_{1516}$) и $A_p A_k A_{p+1010} \cong \triangle A_1 A_{k-p+1} A_{1011}$ (въртене около центъра на многоъгълника на ъгъл $-\dfrac{(p-1)\pi}{1010}$), което означава, че всеки правоъгълен триъгълник (с върхове измежду върховете на правилен 2020-ъгълник) е еднакъв с някой от тригълниците $A_1 A_k A_{1011}$, $k = 2, 3, \ldots, 506$.

Задача 6. За кои стойности на параметъра a уравнението
$\log_x (a - 16\,x) = -1$ има точно едно решение?

Решение: За да бъде число x корен на даденото уравнение е необходимо и достатъчно да удовлетворява условията

$$x > 0\,,\ x \neq 1\,,\ a - 16x > 0 \quad \text{и уравнението} \quad a - 16x = x^{-1}\,,$$

което при тези условия е еквивалентно на $16x^2 - ax + 1 = 0$.

При $-8 < a < 8$ това уравнение няма реални корени, защото $D = a^2 - 64 < 0$.

При $|a| \geq 8$ корените на уравнението са с еднакви знаци, защото $x_1 x_2 = \dfrac{1}{16}$. Понеже $x_1 + x_2 = \dfrac{a}{16}$, то корените са отрицателни при $a \leq -8$.

Следователно, $a < 8$ не удовлетворява условието на задачата.

При $a = 8$ уравнението има единствен корен $x_0 = \dfrac{1}{4}$, който удовлетворява условията $x_0 > 0\,,\ x_0 \neq 1\,,\ a - 16x_0 = 4 > 0$.

При $a > 8$ уравнението има два различни положителни корена. Понеже

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{a}{32} < \frac{a}{16} \quad \text{и} \quad 16\left(\frac{a}{16}\right)^2 - a\,\frac{a}{16} + 1 = 1 > 0\,,$$

то и двата удовлетворяват условието $a - 16x > 0$. Следователно, стойностите на $a > 8$, които удовлетворяват условието на задачата, са онези, за които квадратното уравнение има корен 1, т.е. $a = 17$.

Отговор: $a = 8$ и $a = 17$.

Задача 7. Да се намерят най-малката и най-голямата стойности на функцията

$$f(x) = 27^{\sqrt{x(4-x)}} - 3^{\sqrt{x(4-x)}+3}$$

За кои стойности на аргумента се достигат?

Решение: Дефиниционната област на функцията е $[0, 4]$. За $x \in [0, 4]$ имаме

$$0 \leq x(4-x) \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \sqrt{x(4-x)} \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq 3^{\sqrt{x(4-x)}} \leq 9\,.$$

Ще намерим най-малката и най-голямата стойности на функцията $g(t) = t^3 - 27t$ в интервала $[1, 9]$. За производната ѝ имаме $g'(t) = 3t^2 - 27$, което означава, че $g'(t) < 0$ за $t \in (1, 3)$ и $g'(t) > 0$ за $t \in (3, 9)$. Следователно, $g(1) \geq g(t) \geq g(3)$ за $t \in [1, 3]$ и $g(3) \leq g(t) \leq g(9)$ за $t \in [3, 9]$, т.е. $g(3) = -54$ е най-малката стойност. Понеже $g(9) = 486 > -26 = g(1)$, то най-голямата стойност е $g(9) = 486$.

От $f(x) = g\left(3^{\sqrt{x(4-x)}}\right)$ получаваме, че най-голямата стойност на f е 486 и се достига за

$$3^{\sqrt{x(4-x)}} = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x(4-x)} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x(4-x) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\,,$$

а най-малката стойност е -54 и се достига за

$$3^{\sqrt{x(4-x)}} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x(4-x)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \pm \sqrt{3}\,.$$

Задача 8. Да се намерят стойностите на параметъра b, за които множеството от стойностите на функцията

$$g(x) = \frac{b - 2\cos x}{\sin^2 x + b^2} \quad \text{съдържа интервала} \quad [2, 3]\,.$$

Решение: Полагаме $H(y) = \dfrac{2y - b}{y^2 - 1 - b^2}$. Понеже $g(x) = H(\cos x)$, задачата се свежда до намирането на стойностите на b, за които множеството от стойностите на функцията $H(y)$, $y \in [-1, 1]$, съдържа интервала $[2, 3]$. За $0 < p < 1$ ще изследваме за кои b числото $\dfrac{1}{p}$ е стойност на $H(y)$, $y \in [-1, 1]$.

$b = 0$ е такава стойност. Наистина, за всяко $0 < p$, уравнението $P(y) = y^2 - 2py - 1 = 0$ има корен в $(-1, 1)$, защото $P(-1) = 2p > 0$ и $P(1) = -2p < 0$. Следователно, уравнението $\dfrac{2y}{y^2 - 1} = \dfrac{1}{p}$ има корен в $(-1, 1)$.

При $b \neq 0$ уравнението $H(y) = \dfrac{1}{p}$, в интервала $[-1, 1]$, е еквивалетно на $Q(y) = y^2 - 2py - 1 + pb - b^2 = 0$.
Понеже $0 < p < 1$, $Q(p) = -1 - p^2 + pb - b^2 < -1$ и
$Q(-1) = 2p + pb - b^2 > -2p + pb - b^2 = Q(1)$, последното има корен в интервала $[-1, 1]$ тогава и само тогава, когато $Q(-1) \geq 0$.

Следователно, $\dfrac{1}{p}$, $0 < p < 1$, е стойност на $H(y)$, $y \in [-1, 1]$, за онези b, които удовлетворяват неравенството $2p + pb \geq b^2$.

То няма решения $b \leq -2$ при $0 < p$. Ако $b > -2$ е решение на неравенството, то b е решение и за всяка по-голяма стойност на p.

Понеже $\dfrac{1}{p} \in [2, 3]$ е еквивалентно на $p \in \left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right]$, то множеството от стойностите на функцията $H(y)$, $y \in [-1, 1]$, съдържа интервала $[2, 3]$ за онези b, които удовлетворяват неравенството $\dfrac{2 + b}{3} \geq b^2$, чиито решения са числата от интервала $\left[-\dfrac{2}{3}\,, 1\right]$, който включва и числото 0.