Софийски Университет „Св. Климент Охридски”
Факултет по математика и информатика

Национално състезание по елементарна математика

„Проф. Борислав Боянов”

Втори кръг, 27 юни 2020

Примерни решения

Задача 1. В остроъгълния триъгълник ABC точката H е пресечната точка на височините на триъгълника, точката O е център на описаната окръжност, ъглополовящата CL на ъгъл $\sphericalangle ACB$ (L е върху страната AB) разполовява отсечката OH, $\sphericalangle BAC = 45^\circ$ и $AB = 2$. Да се намери лицето на триъгълника ABC.

Решение: Използваме стандартните означения за елементите на триъгълника ABC.

Нека CL пресича описаната около триъгълника ABC окръжност в точката C_1, M е пресечната точка на CL с OH и точките A', B' и C' са петите на височините прекарани, съответно, през върховете A, B и C. Точката C_1 разполовява дъгата AB. Следователно OC_1 е симетрала на отсечката AB и OC_1 е успоредна на CH. Тогава триъгълниците OMC_1 и HMC са подобни, а от условието $OM = MH$, и еднакви. Така получаваме, че $CH = R$. От друга страна, $CB' = a\cos\gamma$ и $CH = \frac{CB'}{\cos\sphericalangle B''CH} = \frac{a\cos\gamma}{\cos(90^\circ-\alpha)} = \frac{2R\sin\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha} = 2R\cos\gamma$. Следователно $\cos\gamma = \frac{1}{2}$ и $\gamma = 60^\circ$. Оттук $R = \frac{c}{2\sin\gamma} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $a = 2R\sin\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ и лицето на триъгълника е

$$\frac{ac\sin\beta}{2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}\sin 75^\circ = \frac{2\sqrt{6}}{3}\sin(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1+\sqrt{3}\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Задача 2. Да се намерят стойностите на параметъра b, за които системата

$$\left| \begin{array}{rcl} |xy - 3x - 4y + 12| & = & b \\ x^2 + y^2 - 8x - 6y & = & -b^2 \end{array} \right.$$

има точно четири различни решения.
Какъв е най-големият възможен брой различни решения на тази система?

Решение: Преобразуваме системата до

$$\left| \begin{array}{rcl} |(x-4)(y-3)| & = & b \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 & = & 25 - b^2 \end{array} \right.$$

При $b \notin [0,\, 5]$ системата няма решение. Полагаме $u = |x-4|$ и $v = |y-3|$. От

$$\left| \begin{array}{rcl} uv & = & b \\ u^2 + v^2 & = & 25 - b^2 \end{array} \right. \qquad \text{намираме} \quad (u+v)^2 = 25 + 2b - b^2 .$$

Последното няма решение при $25+2b-b^2 < 0$, т.е. $b \notin [1-\sqrt{26},\, 1+\sqrt{26}]$. Следователно, търсените стойности са в интервала $[0,\, 5]$. За тях получаваме $u+v = \sqrt{25+2b-b^2}$, понеже $u \geq 0$ и $v \geq 0$.

Следователно, u и v са корените на квадратното уравнение $t^2 - \sqrt{25+2b-b^2}\, t + b = 0$.

- При $b = 0$ уравнението има корени 0 и 5. Тогава изходната система има решения $(4,\, -2)$; $(4,\, 8)$; $(-1,\, 3)$; $(9,\, 3)$.
- При $b \in \left(0,\, -1+\sqrt{26}\right)$ уравнението има корени $0 < t_1 < t_2$. Тогава изходната система има решения $(4 \pm t_1,\, 3 \pm t_2)$; $(4 \pm t_2,\, 3 \pm t_1)$, като знаците са независими, т.е. 8 решения.
- При $b = \sqrt{26}\, - 1$ уравнението има двоен корен $t_0 = \sqrt{\sqrt{26}\, - 1}$. Тогава изходната система има решения $(4 \pm t_0,\, 3 \pm t_0)$, като знаците са независими, т.е. 4 решения.
- При $b \in \left(\sqrt{26}\,, 5\right]$ уравнението няма решение, т.е. изходната система няма решение.

Задача 3. Да се докаже, че за всяка тройка $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ е изпълнено неравенството

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \le \frac{x^3}{y^2} + \frac{y^3}{z^2} + \frac{z^3}{x^2}\,.$$

Кога се достига равенство?

Решение: Използваме добре известното неравенство на Коши-Шварц

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right)\ ,$$

с равенство за $a_1 = pb_1$, $a_2 = pb_2$, $a_3 = pb_3$, $p \in \mathbb{R}$.

Имаме

$$\left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{x^3}}{y}\cdot\sqrt{x} + \frac{\sqrt{y^3}}{z}\cdot\sqrt{z} + \frac{\sqrt{z^3}}{x}\cdot\sqrt{z}\right)^2 \le \left(\frac{x^3}{y^2} + \frac{y^3}{z^2} + \frac{z^3}{x^2}\right)(x+y+z)\ .$$

От друга страна

$$(x+y+z)^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{y}}\cdot\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt{z}}\cdot\sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}\right)^2 \le \left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x}\right)(x+y+z)\ ,$$

откъдето

$$x+y+z \le \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \quad \text{и}$$

$$\left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x}\right)^2 \le \left(\frac{x^3}{y^2} + \frac{y^3}{z^2} + \frac{z^3}{x^2}\right)\left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x}\right)\ ,$$

което е еквивалентно на исканото.

Равенство се достига само за $x = y = z$.

Задача 4. Да се намерят целите числа K от интервала $[2000\,,\, 2060]$, за които уравнението $K + x^2 = 2^y$ има решение в цели числа x и y.

Решение: Понеже $2^{11} = 2048 \in [2000\,,\, 2060]$, то за $K = 2012$ имаме $x = 6$, $y = 11$, за $K = 2023$ — $x = 5$, $y = 11$, за $K = 2032$ — $x = 4$, $y = 11$, за $K = 2039$ — $x = 3$, $y = 11$, за $K = 2044$ — $x = 2$, $y = 11$, за $K = 207$ — $x = 1$, $y = 11$, за $K = 2048$ — $x = 0$, $y = 11$.

Ще покажем, че за останалите цели числа от интервала $[2000\,,\, 2060]$ уравнението $K + x^2 = 2^y$ няма решение в цели числа x и y.

Нека то има решение, за което $x \ne 0$.

- Ако K е четно число, то 4 дели K и уравнението $K_1 + x^2 = 2^y$, $K = 4K_1$, има решение в цели числа. Наистина, в този случай, x е четно, значи x^2 се дели на 4, откъдето, след съкращавене на 4 , получаваме $K_1 + x_1^2 = 2^{y-2}$, $x = 2x_1$, .

- Ако K е нечетно число, то и x е нечетно, значи $x^2 = 8x_1 + 1$. Следователно, $K = 8K_1 - 1$.

Следователно, уравнението $K + x^2 = 2^y$ би могло да има решение в цели числа само в случаите 2007, 2015, 2031, 2055, 2060 (еквивалентно 515).

- Ако $K = 3K_1$ (2007, 2031, 2055), то 3 не дели x, значи $x^2 = 3x_1 + 1$, откъдето получаваме $y = 2p$. Тогава $K = (2^p + x)(2^p - x)$, т.е. K е произведение на две цели числа със сума 2^{p+1}.

- $2007 = 1.2007 = 3.669 = 9.223$ са всички представяния като произведение на два множителя, то за $K = 2031$ уравнението няма решение.

- $2031 = 1.2031 = 3.677$ са всички представяния като произведение на два множителя, то за $K = 2007$ уравнението няма решение.

- $2055 = 1.2055 = 3.685 = 5.411 = 15.137$ са всички представяния като произведение на два множителя, то за $K = 2055$ уравнението няма решение.

- Ако $K = 5K_1$ (515, 2015), то 5 не дели x, значи $x^2 = 5x_1 \pm 1$, откъдето получаваме $y = 2p$. Тогава $K = (2^p + x)(2^p - x)$, т.е. K е произведение на две цели числа със сума 2^{p+1}.

- $515 = 1.515 = 5.103$ са всички представяния като произведение на два множителя, то за $K = 2060$ уравнението няма решение.

- $2015 = 1.2015 = 5.403 = 13.155 = 31.65$ са всички представяния като произведение на два множителя, то за $K = 2015$ уравнението няма решение.

Задача 5. Робот се движи по ръбовете на куб, като за един ход преминава от връх към друг връх, свързан чрез ръб с началния.

а) Кои са крайните върхове, до които ще достигне роботът, стартирайки от даден връх, след четен брой ходове?

б) Да се намери броят на начините, по които роботът може да се върне в началния (даден) връх след извършването на $2N$ хода (N – естествено число).

Решение: Нека кубът е с върхове V_q с координати (m_1, m_2, m_3), $m_i \in \{0, 1\}$, $q = 4m_3 + 2m_2 + m_1$. Означаваме и $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. За върховете V_q и векторите e_i използваме събиране по модул 2 ($0 + 0 = 1 + 1 = 0$, $1 + 0 = 0 + 1 = 1$).
По този начин, крайният връх на ход, с начален връх V_q, е $V_q + e_i$.

а) Всеки ход променя четността на сумата $m_1 + m_2 + m_3$. Следователно, четен брой ходове запазват четността на тази сума. Върховете се разделят на две групи — "четни" V_0, V_3, V_5, V_6, и "нечетни" V_1, V_2, V_4, V_7, като от връх от едната група не може да се достигне до връх от другата с четен брой ходове, а с два хода може да се стигне до връх от същата група.

б) Търсим броя на функциите φ, дефинирани за всяко цяло k, $1 \le k \le 2N$, и със стойности 1, 2 или 3, за които $\sum_{k=1}^{2N} e_{\varphi(k)} = V_0$ (двоично събиране). Нека този брой е B.

Лема: Броят на функциите φ , дефинирани за всяко цяло k , $1 \leq k \leq 2N$, и със стойности 1, 2 или 3, за които $\sum_{k=1}^{2N} e_{\varphi(k)} = V_3$ (двоично събиране), е $B-1$.

Доказателство: За φ , за която $\sum_{k=1}^{2N} e_{\varphi(k)} = V_0$ и φ не е константата 3, дефинираме $F(\varphi)=\psi$ по следния на начин:

Нека p е най-малкото цяло число между 1 и $2N$, за което
$\varphi(p+1)=\varphi(p+2)=\ldots=\varphi(2N)$. Полагаме $\psi(k)=\varphi(k)$ за $k \neq p$ и $\psi(p)=3-\varphi(p)$.

Имаме $\sum_{k=1}^{2N} e_{\psi(k)} = \sum_{k=1}^{2N} e_{\varphi(k)} + e_1 + e_2 = V_0 + e_1 + e_2 = V_3$.

От друга страна, ако ψ е функция, за която $\sum_{k=1}^{2N} e_{\psi(k)} = V_3$, то тя е "стойност" на F . Наистина, ψ взема стойност 1 (и стойност 2) на поне едно място. Отново определяме p като най-малкото цяло число между 1 и $2N$, за което $\psi(p+1)=\psi(p+2)=\ldots=\psi(2N)$ и полагаме $\varphi(k)=$ за $k \neq p$ и $\varphi(p)=3-\ \psi(p)$. Тогава $\psi=F(\varphi)$.

Следователно, F е биекция, с което лемата е доказана. Тя е приложима и за върховете V_5 и V_6 (с преномериране). Всички начини на движение, стартиращи от V_0 и състоящи се от $2N$ хода, са 3^{2N} на брой и завършват в един от върховете V_0 , V_3 , V_5 , V_6 , откъдето $3(B-1)+B=3^{2N}$, т.е. $B=\dfrac{3^{2N}+3}{4}$.