Софийски Университет „Св. Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика

Национално състезание по елементарна математика

„Проф. Борислав Боянов"

Втори кръг, 27 юни 2020

Задача 1. В остроъгълния триъгълник ABC точката H е пресечната точка на височините на триъгълника, точката O е център на описаната окръжност, ъглополовящата CL на ъгъл $\sphericalangle ACB$ (L е върху страната AB) разполовява отсечката OH, $\sphericalangle BAC = 45^\circ$ и $AB = 2$. Да се намери лицето на триъгълника ABC.

Задача 2. Да се намерят стойностите на параметъра b, за които системата

$$\left| \begin{array}{rcl} |xy - 3x - 4y + 12| & = & b \\ x^2 + y^2 - 8x - 6y & = & -b^2 \end{array} \right.$$

има точно четири различни решения.
Какъв е най-големият възможен брой различни решения на тази система?

Задача 3. Да се докаже, че за всяка тройка $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ е изпълнено неравенството

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \le \frac{x^3}{y^2} + \frac{y^3}{z^2} + \frac{z^3}{x^2}\,.$$

Кога се достига равенство?

Задача 4. Да се намерят целите числа K от интервала $[2000\,,\,2060]$, за които уравнението $K + x^2 = 2^y$ има решение в цели числа x и y.

Задача 5. Робот се движи по ръбовете на куб, като за един ход преминава от връх към друг връх, свързан чрез ръб с началния.

а) Кои са крайните върхове, до които ще достигне роботът, стартирайки от даден връх, след четен брой ходове?

б) Да се намери броят на начините, по които роботът може да се върне в началния (даден) връх след извършването на $2N$ хода (N – естествено число).

Време за работа 5 часа.