Софийски университет „Св. Климент Охридски“

Факултет по математика и информатика

Национално състезание по елементарна математика проф. „Борислав Боянов“

Първи кръг, 19 март 2023 г.

Примерни решения

Задача 1. Да се реши неравенството

$$\frac{x-7}{x^2-4} - \frac{1}{x+1} \geq \frac{3(x+1)}{4}.$$

Решение на задача 1. Допустими стойности за x в неравенството са всички реални числа $x \neq \pm 2$ и $x \neq -1$.

Даденото неравенство е еквивалентно на

$$\frac{x-7}{x^2-4} - \frac{1}{x+1} - \frac{3(x+1)}{4} \geq 0,$$

$$\frac{4(x-7)(x+1) - 4(x^2-4) - 3(x+1)^2(x^2-4)}{4(x^2-4)(x+1)} \geq 0,$$

$$\frac{-3x^4-6x^3+9x^2}{4(x^2-4)(x+1)} \geq 0, \qquad \frac{3x^2(1-x)(x+3)}{4(x+2)(x+1)(x-2)} \geq 0, \qquad \frac{x^2(x-1)(x+3)}{(x+2)(x+1)(x-2)} \leq 0.$$

С метода на интервалите определяме решенията на последното неравенство:

$$x \in (-\infty; -3] \cup (-2; -1) \cup \{0\} \cup [1; 2). \qquad \square$$

Задача 2. В изпъкналия четириъгълник $ABCD$ точките M_1, M_2, M_3 лежат на страната AB и точките N_1, N_2, N_3 лежат на страната CD, така че

$$AM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3B = \frac{AB}{4}, \qquad DN_1 = N_1N_2 = N_2N_3 = N_3C = \frac{CD}{4}.$$

Да се докаже, че за лицата на четириъгълниците $M_1M_3N_3N_1$ и $ABCD$ е изпълнено

$$S_{M_1M_3N_3N_1} : S_{ABCD} = 1 : 2.$$

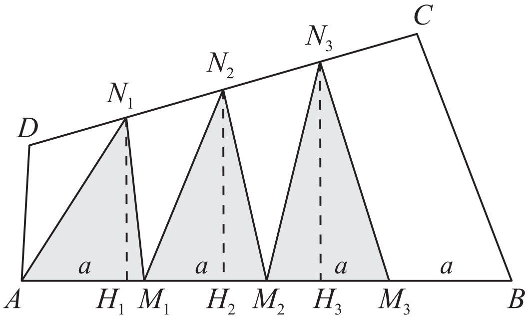
Решение на задача 2. Нека $a = AM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3B = \dfrac{AB}{4}$.

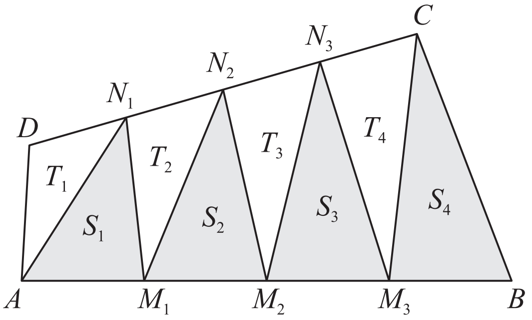
Да разгледаме триъгълниците AM_1N_1, $M_1M_2N_2$ и $M_2M_3N_3$. Нека точките H_1, H_2, H_3 са петите на височините съответно през върховете N_1, N_2, N_3 в тези триъгълници. Тогава $H_1H_3N_3N_1$ е правоъгълен трапец ($N_1H_1 \| N_3H_3 \| N_2H_2$) и тъй като $N_1N_2 = N_2N_3$, то N_2H_2 е средна отсечка в този трапец. Тогава $2N_2H_2 = N_1H_1 + N_3H_3$,

$$2\,\frac{a\,.\,N_2H_2}{2} = \frac{a\,.\,N_1H_1}{2} + \frac{a\,.\,N_3H_3}{2}, \qquad 2S_{M_1M_2N_2} = S_{AM_1N_1} + S_{M_2M_3N_3}$$

или при означенията на чертежа вдясно (с $S_1, \dots, S_4$ са означени лицата на съответните защриховани триъгълници, а с $T_1, \dots, T_4$ – лицата на незащрихованите триъгълници):

$$2S_2 = S_1 + S_3. \tag{1}$$





Аналогично за лицата S_2, S_3, S_4 имаме

$$2S_3 = S_2 + S_4. \tag{2}$$

Събираме почленно (1) и (2) и получаваме $2S_2 + 2S_3 = S_1 + S_3 + S_2 + S_4$, т.е.

$$S_2 + S_3 = S_1 + S_4. \tag{3}$$

По същия начин, за лицата T_1, T_2, T_3, T_4 показваме, че

$$T_2 + T_3 = T_1 + T_4. \tag{4}$$

Сега събираме почленно (3) и (4):

$$S_2 + T_2 + S_3 + T_3 = S_1 + T_1 + S_4 + T_4.$$

Оттук,

$$S_{M_1M_3N_3N_1} = S_{AM_1N_1D} + S_{M_3BCN_3}, \qquad S_{M_1M_3N_3N_1} = S_{ABCD} - S_{M_1M_3N_3N_1}.$$

От последното равенство веднага следва $S_{M_1M_3N_3N_1} : S_{ABCD} = 1 : 2$. $\square$

Задача 3. Да се реши уравнението

$$4x - x^2 = 7 - 3\sin\frac{2\pi}{x^2}.$$

Решение на задача 3. Преобразуваме даденото уравнение във вида

$$x^2 - 4x + 7 = 3\sin\frac{2\pi}{x^2} \qquad \text{или} \qquad (x-2)^2 + 3 = 3\sin\frac{2\pi}{x^2}.$$

Ясно е, че $(x-2)^2 + 3 \geq 3$ с равенство само за $x = 2$. Освен това, $3\sin\dfrac{2\pi}{x^2} \leq 3$, като равенство тук имаме при

$$\frac{2\pi}{x^2} = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Последното равенство е вярно при $x = 2$ единствено за $n = 1$.

Следователно, даденото уравнение има едно решение $x = 2$. $\square$

Задача 4. Дадено е уравнението

$$4^x - 3a\,2^x + a^3 = 0,$$

където a е реален параметър.

а) Да се намерят стойностите на a, при които уравнението има различни реални корени.

б) Да се намерят стойностите на a, при които корените на уравнението са реални и сборът им е 3.

Решение на задача 4. Полагаме $t = 2^x > 0$ и за t получаваме уравнението:

$$t^2 - 3at + a^3 = 0. \tag{1}$$

а) Даденото показателно уравнение има два различни реални корена тогава и само тогава, когато квадратното уравнение (1) има два различни положителни корена. Така получаваме следните условия за параметъра a:

$$\left|\begin{array}{l} D = 9a^2 - 4a^3 > 0, \\ t_1 + t_2 = 3a > 0, \\ t_1 t_2 = a^3 > 0. \end{array}\right.$$

От второто и третото неравенство намираме $a > 0$. От първото неравенство получаваме

$$4a^2\Big(\frac{9}{4} - a\Big) > 0, \qquad \text{т.е} \qquad a < \frac{9}{4}.$$

Така намираме $a \in \Big(0; \dfrac{9}{4}\Big)$.

б) Нека корените x_1 и x_2 на показателното уравнение са реални и $x_1 + x_2 = 3$. Тогава

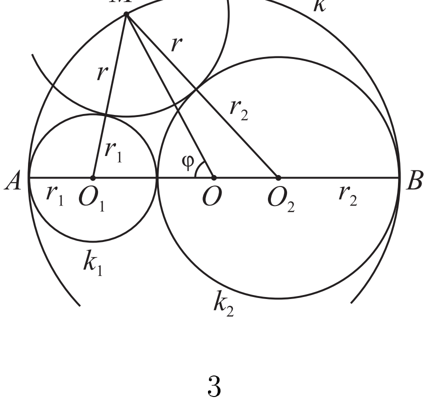
$$2^3 = 2^{x_1 + x_2} = 2^{x_1} \,.\, 2^{x_2} = t_1 t_2 = a^3.$$

Следователно $a^3 = 2^3$, откъдето $a = 2$. Понеже $2 \in \Big(0; \dfrac{9}{4}\Big)$, за така намерената стойност на a корените на показателното уравнение са реални, както установихме по-горе. $\square$

Задача 5. Две окръжности k_1 и k_2 с дължини на радиусите, съответно $r_1 = 3$ и $r_2 = 6$ се допират външно една до друга, вътрешно до окръжност k, и центровете им лежат върху диаметър на k. Точка M лежи върху окръжността k и е такава, че окръжност с център M и радиус r се допира външно до k_1 и k_2. Да се намери дължината на радиуса r.

Решение на задача 5. Нека O_1, O_2 и O са съответно центровете на окръжностите k_1, k_2 и k, R е радиусът на k и AB е диаметърът на k, върху който лежат O_1 и O_2. Имаме

$$2R = AB = 2r_1 + 2r_2, \qquad R = r_1 + r_2 = 3 + 6 = 9.$$



Също така,

$$O_1O = AO - AO_1 = R - r_1 = 9 - 3 = 6, \qquad O_2O = BO - BO_2 = R - r_2 = 9 - 6 = 3,$$
$$OM = R = 9, \qquad O_1M = r_1 + r = r + 3, \qquad O_2M = r_2 + r = r + 6.$$

Да означим $\varphi = \sphericalangle AOM$, тогава $\sphericalangle BOM = 180^\circ - \varphi$. Прилагаме косинусовата теорема за $\triangle O_1OM$ и $\triangle O_2OM$:

$$\begin{aligned} &OO_1^2 + OM^2 - 2\,OO_1\,.\,OM\cos\varphi = O_1M^2, \\ &OO_2^2 + OM^2 - 2\,OO_2\,.\,OM\cos(180^\circ - \varphi) = O_2M^2, \end{aligned}$$

откъдето

$$\begin{aligned} &6^2 + 9^2 - 2\,.\,6\,.\,9\cos\varphi = (r+3)^2, \\ &3^2 + 9^2 + 2\,.\,3\,.\,9\cos\varphi = (r+6)^2, \end{aligned} \qquad \text{т.е.} \qquad \begin{aligned} &117 - 108\cos\varphi = (r+3)^2, \\ &90 + 54\cos\varphi = (r+6)^2. \end{aligned}$$

От последните две уравнения елиминираме $\cos\varphi$, например, като съберем първото уравнение с умноженото по 2 второ. Получаваме

$$117 + 2\,.\,90 = (r+3)^2 + 2(r+6)^2, \qquad 297 = 3r^2 + 30r + 81, \qquad r^2 + 10r - 72 = 0.$$

Последното квадратно уравнение има един положителен корен $r = \sqrt{97} - 5$.

Следователно, окръжността с център точката M и допираща се до k_1 и k_2 има радиус $r = \sqrt{97} - 5$. □

Задача 6. Дадена е безкрайна намаляваща геометрична прогресия $b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots$ с частно q. Известно е, че

$$b_3 + 3b_4 = 18b_5 \qquad \text{и} \qquad b_0b_1 + b_1b_2 + \cdots b_{n-1}b_n + \cdots = b_0 + b_1 + \cdots + b_n + \cdots.$$

Да се намери b_2.

Решение на задача 6. За безкрайната геометрична прогресия $b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots$ имаме $b_n = b_0q^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. От условието $b_3 + 3b_4 = 18b_5$ получаваме

$$b_0q^3 + 3b_0q^4 = 18b_0q^5, \qquad 1 + 3q = 18q^2, \qquad 18q^2 - 3q - 1 = 0.$$

От последното квадратно уравнение намираме

$$q_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 + 72}}{36} = \frac{3 \pm 9}{36}, \qquad q_1 = \frac{1}{3}, \quad q_2 = -\frac{1}{6}.$$

Тъй като прогресията е намаляваща, частното трябва да е в интервала $(0;1)$, т.е. $q = \frac{1}{3}$.

Също така, безкрайната геометрична прогресия $b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots$ има сума

$$b_0 + b_1 + \cdots + b_n + \cdots = \frac{b_0}{1-q}. \tag{1}$$

Да забележим, че

$$\begin{aligned} &b_0b_1 = b_0\,.\,b_0q = b_0^2q, \\ &b_1b_2 = b_0q\,.\,b_0q^2 = b_0^2q^3 = (b_0^2q)(q^2), \\ &b_2b_3 = b_0q^2\,.\,b_0q^3 = b_0^2q^5 = (b_0^2q)(q^2)^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &b_nb_{n+1} = b_0q^n\,.\,b_0q^{n+1} = b_0^2q^{2n+1} = (b_0^2q)(q^2)^n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Следователно, редицата b_0b_1, b_1b_2, $\ldots$, b_nb_{n+1}, $\ldots$ е безкрайна геометрична прогресия с първи член c_0 и частно Q, съответно равни на

$$c_0 = b_0^2 q, \qquad Q = q^2, \qquad \text{т.е.} \qquad c_n = c_0 Q^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Сумата на тази прогресия е равна на

$$b_0b_1 + b_1b_2 + \cdots b_{n-1}b_n + \cdots = c_0 + c_1 + \cdots + c_n + \cdots = \frac{c_0}{1-Q} = \frac{b_0^2 q}{1-q^2}. \tag{2}$$

От равенствата (1) и (2) имаме

$$\frac{b_0^2 q}{1-q^2} = \frac{b_0}{1-q}, \qquad \frac{b_0 q}{1+q} = 1.$$

Като вземем предвид намереното по-рано $q = \frac{1}{3}$, намираме

$$b_0 = 1 + \frac{1}{q} = 4, \qquad b_2 = b_0 q^2 = \frac{4}{9}. \qquad \square$$

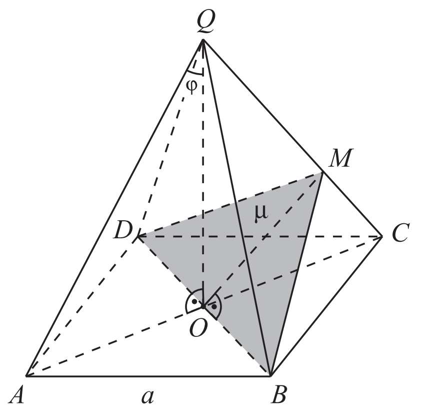
Задача 7. В правилна четириъгълна пирамида основният ръб има дължина a и ъгълът между околен ръб и височината на пирамидата е равен на φ. През диагонала на основата да се построи сечение на пирамидата с равнина, така че лицето на сечението да е най-малко и да се намери това лице.

Решение на задача 7. Нека $QABCD$ е дадената пирамида, с основа $ABCD$ и връх точката Q. Означаваме с O пресечната точка на диагоналите на основата, която се явява и пета на височината през върха Q към основата на пирамидата. В квадрата $ABCD$,

$$AC = BD = \sqrt{2}\,a, \qquad OA = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{2}\,a}{2}.$$

По условие, $\varphi = \sphericalangle AQO$. От правоъгълния $\triangle AOQ$ намираме височината на пирамидата към основата $ABCD$ и околния ръб:

$$OQ = AO \operatorname{cotg}\varphi = \frac{\sqrt{2}\,a}{2}\operatorname{cotg}\varphi, \qquad AQ = \frac{OA}{\sin\varphi} = \frac{\sqrt{2}\,a}{2\sin\varphi}.$$



Разглеждаме равнина μ през диагонала BD на основата $ABCD$ и пресичаща околния ръб QC в точката M. Сечението на пирамидата с равнината μ е $\triangle BDM$ с лице

$$S = \frac{BD \,.\, OM}{2}.$$

Измежду всички такива сечения, най-малко лице има това, при което височината MO на $\triangle BDM$ има най-малка дължина, т. е. когато $OM \perp CQ$. Тогава за лицето на правоъгълния триъгълник COQ имаме

$$\frac{1}{2} OM \,.\, CQ = S_{COQ} = \frac{1}{2} CO \,.\, OQ, \qquad OM \cdot \frac{\sqrt{2}\, a}{2 \sin\varphi} = \frac{\sqrt{2}\, a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}\, a}{2} \operatorname{cotg}\varphi.$$

Оттук,

$$OM = \frac{\sqrt{2}\, a}{2} \operatorname{cotg}\varphi \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}\, a \cos\varphi}{2}.$$

Следователно, търсеното най-малко лице е

$$S = \frac{1}{2} BD \,.\, OM = \frac{1}{2} \sqrt{2}\, a \, \frac{\sqrt{2}\, a \cos\varphi}{2} = \frac{a^2 \cos\varphi}{2}$$

и то се получава, когато равнината μ е перпендикулярна на околен ръб. $\square$

Задача 8. Дадени са n прави в равнината, $n \leq 2023$, като никои 3 не се пресичат в една точка и точно k от тях са успоредни помежду си. Разглеждаме пресечните точки на дадените прави. Известно е, че броят на пресечните точки върху успоредните прави е 11 пъти по-малък от броя на всички пресечни точки. Да се намери най-големият брой n на прави с тези свойства. Колко от тези прави са успоредни?

Решение на задача 8. Ясно е, че задачата има смисъл за $n \geq 2$. Нека

A е броят на пресечните точки, лежащи върху успоредните k прави,

B е броят на останалите пресечни точки (нележащи върху успоредните прави).

При $k = 0$, както и при $k = n$ (ако всички дадени прави са успоредни), имаме $A = 0$. Следователно, $0 < k < n$ (изразът „брой на пресечните точки“ предполага, че A е естествено число). При $k = n - 1$, условието $A + B = 11A$ не е изпълнено за $n \geq 2$.

Затова, в по-нататъшните ни разглеждания $n \geq 2$ и $0 < k < n - 1$. Тогава

$$A = k(n - k).$$

Броят на останалите пресечни точки е равен на броя на пресечните точки, лежащи върху останалите $n - k$ прави, т.е.

$$B = C_{n-k}^2 = \binom{n-k}{2} = \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}.$$

От условието

$$A + B = 11A, \qquad B = 10A,$$

получаваме

$$\frac{(n-k)(n-k-1)}{2} = 10k(n-k), \qquad n - k - 1 = 20k, \qquad n = 21k + 1.$$

Тъй като $2023 = 21 \,.\, 96 + 7$, най-голямото естествено число n от вида $21k+1$ и $n \leq 2023$ е $n = 21 \,.\, 96 + 1 = 2017$. В този случай, броят на успоредните прави е $k = 96$. $\square$