



НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА
ПРОФ. „БОРИСЛАВ БОЯНОВ“

ПЪРВИ КРЪГ, 19 МАРТ 2023 Г.

Задача 1. Да се реши неравенството $\frac{x-7}{x^2-4} - \frac{1}{x+1} \geq \frac{3(x+1)}{4}$.

Задача 2. В изпъкналия четириъгълник $ABCD$ точките M_1, M_2, M_3 лежат на страната AB и точките N_1, N_2, N_3 лежат на страната CD , така че

$$AM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3B = \frac{AB}{4}, \quad DN_1 = N_1N_2 = N_2N_3 = N_3C = \frac{CD}{4}.$$

Да се докаже, че за лицата на четириъгълниците $M_1M_3N_3N_1$ и $ABCD$ е изпълнено

$$S_{M_1M_3N_3N_1} : S_{ABCD} = 1 : 2.$$

Задача 3. Да се реши уравнението $4x - x^2 = 7 - 3 \sin \frac{2\pi}{x^2}$.

Задача 4. Дадено е уравнението $4^x - 3a2^x + a^3 = 0$, където a е реален параметър. Да се намерят:

- а) стойностите на a , при които уравнението има различни реални корени.
- б) стойностите на a , при които корените на уравнението са реални и сборът им е 3.

Задача 5. Две окръжности k_1 и k_2 с дължини на радиусите, съответно $r_1 = 3$ и $r_2 = 6$ се допират външно една до друга, вътрешно до окръжност k , и центровете им лежат върху диаметър на k . Точка M лежи върху окръжността k и е такава, че окръжност с център M и радиус r се допира външно до k_1 и k_2 . Да се намери дължината на радиуса r .

Задача 6. Дадена е безкрайна намаляваща геометрична прогресия $b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$ с частно q . Известно е, че

$$b_3 + 3b_4 = 18b_5 \quad \text{и} \quad b_0b_1 + b_1b_2 + \dots + b_{n-1}b_n + \dots = b_0 + b_1 + \dots + b_n + \dots.$$

Да се намери b_2 .

Задача 7. В правилна четириъгълна пирамида основният ръб има дължина a и ъгълът между околен ръб и височината на пирамидата е равен на φ . През диагонала на основата да се построи сечение на пирамидата с равнина, така че лицето на сечението да е най-малко и да се намери това лице.

Задача 8. Дадени са n прави в равнината, $n \leq 2023$, като никои 3 не се пресичат в една точка и точно k от тях са успоредни помежду си. Разглеждаме пресечните точки на дадените прави. Известно е, че броят на пресечните точки върху успоредните прави е 11 пъти по-малък от броя на всички пресечни точки. Да се намери най-големият брой n на прави с тези свойства. Колко от тези прави са успоредни?

Пълно решение на всяка задача се оценява с 5 точки.

Време за работа 4 часа (240 минути).

Успешна работа!