Софийски университет „Св. Климент Охридски“
Факултет по математика и информатика

Национално състезание по елементарна математика „проф. Борислав Боянов“

Втори кръг, 14 май 2023 г.

Задача 1. Да се реши системата

$$\left| \begin{array}{l} 2x^3 - 7x^2y + 5xy^2 = x - 2y \\ x^2 - 3y^2 = 1. \end{array} \right.$$

Задача 2. Даден е ромб $ABCD$ с $\sphericalangle BAD = 60^\circ$ и точка M, вътрешна за ромба, такава че $AM = \sqrt{3}$, $BM = \sqrt{13}$ и $CM = 6$.

Да се намери дължината на страната на ромба.

Задача 3. Нека p, q, r са естествени числа, като r не е точен квадрат на цяло число. Да се докаже, че равенството

$$\frac{p+q}{2} = \sqrt[3]{p+\sqrt{r}} + \sqrt[3]{q-\sqrt{r}}$$

не е възможно.

Задача 4. В $\triangle ABC$ е вписана окръжност k с център O, като отсечката AO пресича k в точка J. Допирателната към k в точката J пресича страната AB в точка P. Правите BO и PJ се пресичат в точка Q. Нека L е точка върху правата AO, така че $LQ \| BJ$.

Да се докаже, че $AL \perp CL$.

Задача 5. За полинома от степен 2024,

$$P(x) = x^{2024} - 67x^{2023} + 2023x^{2022} + a_3x^{2021} + \cdots + a_{2023}x + a_{2024},$$

е известно, че има само реални нули. Ако x_1 е най-малката нула на $P(x)$, да се докаже, че

$$x_1 \geq -20\frac{22}{23}.$$

Намерете полином от горния вид, за който се достига равенството.

Пълно решение на всяка задача се оценява с 8 точки.
Време за работа 5 часа (300 минути).

Успешна работа!