Софийски университет „Св. Климент Охридски“

Факултет по математика и информатика

Национално състезание по елементарна математика „проф. Борислав Боянов“

Втори кръг, 14 май 2023 г.

Примерни решения

Задача 1. Да се реши системата

$$\left| \begin{array}{l} 2x^3 - 7x^2y + 5xy^2 = x - 2y \\ x^2 - 3y^2 = 1. \end{array} \right.$$

Решение на задача 1. От първото уравнение изваждаме второто, умножено с $x - 2y$. Получаваме

$$2x^3 - 7x^2y + 5xy^2 - (x^2 - 3y^2)(x - 2y) = 0,$$
$$2x^3 - 7x^2y + 5xy^2 - x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - 6y^3 = 0,$$

т.е.

$$x^3 - 5x^2y + 8xy^2 - 6y^3 = 0. \tag{1}$$

Последното уравнение е хомогенно от степен 3. С директна проверка виждаме, че дадената система няма решение, за което $y = 0$. Тогава при $y \neq 0$, след разделяне с y^3 на двете страни на (1) и полагане $t = \dfrac{x}{y}$ получаваме уравнението

$$t^3 - 5t^2 + 8t - 6 = 0. \tag{2}$$

Уравнението (2) е с целочислени коефициенти и старши коефициент равен на 1. Следователно, ако то има рационални корени, те са цели числа и са измежду делителите на свободния член (-6). Възможните такива корени са $1;\ -1;\ 2;\ -2;\ 3;\ -3;\ 6;\ -6$. С правилото на Хорнер или с директна проверка намираме, че $t = 3$ е корен на (2) и тогава можем да запишем (2) във вида

$$(t - 3)(t^2 - 2t + 2) = 0.$$

Тъй като $t^2 - 2t + 2 = 0$ няма реални корени, единственото реално решение на (2) е $t = 3$.

При $\dfrac{x}{y} = t = 3$, от второто уравнение на системата получаваме

$$(3y)^2 - 3y^2 = 1, \qquad 6y^2 = 1, \qquad y_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Така за решения на системата намираме

$$x_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad y_1 = \frac{\sqrt{6}}{6} \qquad \text{и} \qquad x_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2}, \quad y_2 = -\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

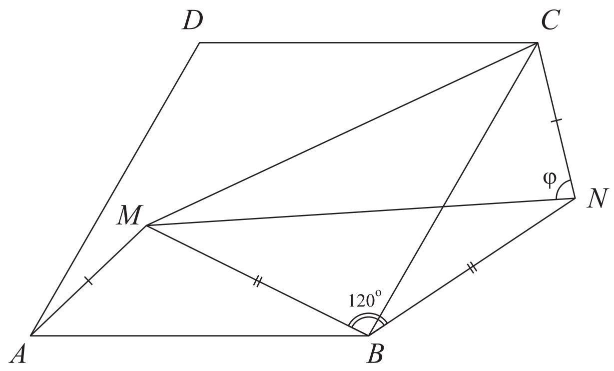
□

Задача 2. Даден е ромб $ABCD$ с $\sphericalangle BAD = 60^\circ$ и точка M, вътрешна за ромба, такава че $AM = \sqrt{3}$, $BM = \sqrt{13}$ и $CM = 6$.

Да се намери дължината на страната на ромба.

Решение на задача 2. При ротация с център B и ъгъл 120° по посока на часовниковата стрелка, точка A се изобразява в точка C, а точка M в точка N. При това, $\triangle BAM \cong \triangle BCN$ и

$$CN = AM = \sqrt{3}, \qquad BN = BM = \sqrt{13}.$$



В равнобедрения $\triangle BMN$ поради ротацията $\sphericalangle MBN = 120^\circ$. Тогава $\sphericalangle BMN = 30^\circ$ и лесно намираме основата на $\triangle BMN$:

$$\frac{MN/2}{BM} = \cos 30^\circ, \qquad MN = 2\sqrt{13}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{39}.$$

Тъй като $MN^2 = CM^2 + CN^2$, триъгълникът CMN е правоъгълен с $\sphericalangle MCN = 90^\circ$. Да означим $\sphericalangle CNM = \varphi$, $0 < \varphi < 90^\circ$. От $\triangle CMN$ намираме

$$\cos\varphi = \frac{CN}{MN} = \frac{1}{\sqrt{13}}, \qquad \sin\varphi = \frac{CM}{MN} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}.$$

Дължината на страната на ромба намираме с косинусовата теорема от $\triangle BNC$:

$$\begin{gathered}
BC^2 = BN^2 + CN^2 - 2\,BN\cdot CN\cos(\sphericalangle BNC),\\
BC^2 = 13 + 3 - 2\sqrt{13}\,\sqrt{3}\,\cos(30^\circ+\varphi),\\
BC^2 = 16 - 2\sqrt{39}\,\big(\cos 30^\circ\,\cos\varphi - \sin 30^\circ\,\sin\varphi\big),\\
BC^2 = 16 - 2\sqrt{39}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{13}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\Big),\\
BC^2 = 19,\\
BC = \sqrt{19}.
\end{gathered}$$

$\square$

Задача 3. Нека p, q, r са естествени числа, като r не е точен квадрат на цяло число. Да се докаже, че равенството

$$\frac{p+q}{2}=\sqrt[3]{p+\sqrt{r}}+\sqrt[3]{q-\sqrt{r}}$$

не е възможно.

Решение на задача 3. За удобство полагаме $A=\dfrac{p+q}{2}$. Като използваме условното тъждество

$$a^3+b^3+c^3=3abc \qquad \text{за} \qquad a+b+c=0,$$

получаваме

$$A^3-p-\sqrt{r}-q+\sqrt{r}=3A\sqrt[3]{(p+\sqrt{r})(q-\sqrt{r})},$$

откъдето

$$(A^3-p-q)^3=27A^3(pq-r+(q-p)\sqrt{r}).$$

Оттук следва, че $q=p$, $A=p$ и последното равенство добива вида

$$(p^3-2p)^3=27p^3(p^2-r), \qquad \text{т.е.} \qquad (p^2-2)^3=27(p^2-r).$$

Тогава p^2-2 се дели на 3, а това е невъзможно. □

Второ решение на задача 3. Допускаме, че за естествените числа p, q, r е в сила равенството

$$\frac{p+q}{2}=\sqrt[3]{p+\sqrt{r}}+\sqrt[3]{q-\sqrt{r}}. \tag{1}$$

Повдигаме на трета степен двете страни на равенството и получаваме

$$\frac{(p+q)^3}{8}=p+\sqrt{r}+3\sqrt[3]{(p+\sqrt{r})(q-\sqrt{r})}\Big(\sqrt[3]{p+\sqrt{r}}+\sqrt[3]{q-\sqrt{r}}\Big)+q-\sqrt{r}.$$

Понеже p,q,r удовлетворяват (1), имаме

$$\frac{(p+q)^3}{8}=p+q+3\,\frac{p+q}{2}\,\sqrt[3]{pq-r+(q-p)\sqrt{r}},$$

$$\frac{(p+q)^2}{4}-2=3\,\sqrt[3]{pq-r+(q-p)\sqrt{r}}.$$

След ново повдигане на трета степен на двете страни на последното равенство имаме

$$\Big(\frac{(p+q)^2}{4}-2\Big)^3=3^3\big(pq-r+(q-p)\sqrt{r}\big) \tag{2}$$

или

$$(q-p)\sqrt{r}=\frac{[(p+q)^2-8]^3}{12^3}-pq+r. \tag{3}$$

Тъй като r не е точен квадрат на цяло число, то изразът в лявата страна на (3) е ирационално число, а в дясната – рационално. Това е възможно само при $p=q$ и тогава (2) приема вида

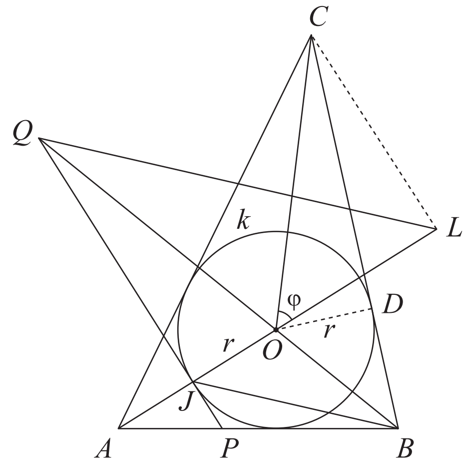
$$(p^2-2)^3=27(p^2-r).$$

Сега p^2-2 трябва да се дели на 3, което е невъзможно. □

Задача 4. В $\triangle ABC$ е вписана окръжност k с център O, като отсечката AO пресича k в точка J. Допирателната към k в точката J пресича страната AB в точка P. Правите BO и PJ се пресичат в точка Q. Нека L е точка върху правата AO, така че $LQ \| BJ$.

Да се докаже, че $AL \perp CL$.

Решение на задача 4. Ще използваме означенията $\sphericalangle BAC = 2\alpha$, $\sphericalangle ABC = 2\beta$, $\sphericalangle ACB = 2\gamma$, r за радиуса на k, и нека $\sphericalangle COL = \varphi$. При това $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$.



Достатъчно е да докажем, че $\cos\varphi = \dfrac{OL}{OC}$.

От $LQ \| BJ$ следва $\triangle BOJ \sim \triangle QOL$. Тогава

$$\frac{OJ}{OL} = \frac{OB}{OQ}. \tag{1}$$

Нека окръжността k се допира до BC в точка D. Имаме $\sphericalangle ODC = 90^\circ$, $\sphericalangle OJQ = 90^\circ$ и $OD = OJ = r$. В правоъгълния $\triangle BDO$,

$$OB = \frac{r}{\sin\beta}. \tag{2}$$

Сега от (1) и (2) получаваме

$$\frac{OL}{OQ} = \frac{OJ}{OB} = \frac{r}{\dfrac{r}{\sin\beta}} = \sin\beta. \tag{3}$$

В правоъгълен $\triangle ODC$,

$$OC = \frac{r}{\sin\gamma}. \tag{4}$$

Тъй като $\sphericalangle JOQ$ е външен за $\triangle ABO$, то

$$\sphericalangle JOQ = \alpha + \beta = 90^\circ - \gamma.$$

В правоъгълния $\triangle JOQ$ имаме $\sphericalangle OQJ = 90^\circ - \sphericalangle JOQ = \gamma$,

$$OQ = \frac{r}{\sin\gamma}$$

и от (4) следва $OQ = OC$. Тогава от (3),

$$\sin\beta = \frac{OL}{OC}. \tag{5}$$

Да забележим, че $\angle COL$ е външен за $\triangle AOC$, следователно

$$\varphi = \alpha + \gamma = 90^\circ - \beta.$$

Така от (5) получаваме

$$\cos\varphi = \cos(90^\circ - \beta) = \sin\beta = \frac{OL}{OC},$$

което доказва $AL \perp CL$. $\square$

Задача 5. За полинома от степен 2024,

$$P(x) = x^{2024} - 67x^{2023} + 2023x^{2022} + a_3x^{2021} + \cdots + a_{2023}x + a_{2024},$$

е известно, че има само реални нули. Ако x_1 е най-малката нула на $P(x)$, да се докаже, че

$$x_1 \geq -20\frac{22}{23}.$$

Намерете полином от горния вид, за който се достига равенството.

Решение на задача 5. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_{2024}$ са всички нули на полинома $P(x)$, т.е. корените на уравнението

$$P(x) = 0.$$

Ще намерим най-малката възможна стойност на най-малкия корен x_1.

От формулите на Виет,

$$\sum_{i=1}^{2024} x_i = 67, \qquad \sum_{1\leq i<j\leq 2024} x_ix_j = 2023.$$

Тогава

$$\sum_{i=1}^{2024} x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{2024} x_i\right)^2 - 2\sum_{1\leq i<j\leq 2024} x_ix_j = 67^2 - 2\cdot 2023 = 443,$$

т.е.

$$x_1^2 + \sum_{i=2}^{2024} x_i^2 = 443. \tag{1}$$

От неравенството за средно-квадратичното и средно-аритметичното на реалните числа $x_2, x_3, \ldots, x_{2024}$ имаме

$$\sum_{i=2}^{2024} x_i^2 \geq \frac{1}{2023}\left(\sum_{i=2}^{2024} x_i\right)^2. \tag{2}$$

Тогава

$$\sum_{i=2}^{2024} x_i^2 \geq \frac{(67-x_1)^2}{2023}. \tag{3}$$

От (1) и (3) следва, че x_1 удовлетворява неравенството

$$x_1^2 + \frac{(67-x_1)^2}{2023} \leq 443. \tag{4}$$

Решенията на (4) са $x_1 \in \left[-\frac{482}{23}; \frac{925}{44}\right]$, като най-малката стойност, която x_1 може да приема е: $-\frac{482}{23} = -20\frac{22}{23}$.

При $x_1 = -20\frac{22}{23}$ в (4) имаме равенство, откъдето следва, че и в (2) имаме равенство. В неравенството за средно-квадратичното и средно-аритметичното (2), равенството е налице точно когато $x_2 = x_3 = \cdots = x_{2024}$, т.е. при $x_2 = x_3 = \cdots = x_{2024} = \frac{67-x_1}{2023} = \frac{1}{23}$.

Непосредствено се проверява, че полиномът

$$\left(x + 20\frac{22}{23}\right)\left(x - \frac{1}{23}\right)^{2023}$$

е от искания вид с най-малка нула $x_1 = -20\frac{22}{23}$. $\square$