СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Писмен конкурсен изпит по Математика

7 юни 2025 г.

Тема №1.

отговори и примерни решения на задачите

- Отбелязан е правилният отговор на всяка задача от 1. до 10.

1.	~~А~~	Б	В	Г
2.	А	Б	В	~~Г~~
3.	А	~~Б~~	В	Г
4.	А	Б	~~В~~	Г
5.	А	~~Б~~	В	Г
6.	А	~~Б~~	В	Г
7.	А	Б	В	~~Г~~
8.	~~А~~	Б	В	Г
9.	А	Б	В	~~Г~~
10.	А	Б	~~В~~	Г

- Отговори на задачи 11. и 12.

11.	$a \in [-2; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; 2]$
12.	$MN = 2\sqrt{15}$

- Примерни решения на задачи от 13. до 16.

Задача 13. Нека е дадена функцията $f(x) = x^3 + px^2 + (p+1)x + 5$, където p е реален параметър и $x \in (-\infty; \infty)$.

а) Да се определи за кои стойности на p функцията $f(x)$ има два локални екстремума.

б) Нека функцията $f(x)$ има два локални екстремума, които се достигат за стойности на аргумента x_1 и x_2. Ако $x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{22}{9}$, да се определи ъгловия коефициент на допирателната към графиката на функцията $f(x)$ в пресечната ѝ точка с графиката на функцията

$$g(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 7.$$

Решение:

а) Функцията $f(x) = x^3 + px^2 + (p+1)x + 5$ има два локални екстремума точно когато нейната производна $f'(x) = 3x^2 + 2px + p + 1$ има два различни реални корена. Понеже $f'(x)$ е квадратна функция, уравнението $f'(x) = 0$ има два реални корена тогава и само тогава, когато дискриминантата $D = p^2 - 3(p+1) > 0$ (тук използваме съкратената формула). Корените на уравнението $p^2 - 3p - 3 = 0$ са $p_1 = \dfrac{3 - \sqrt{21}}{2}$ и $p_2 = \dfrac{3 + \sqrt{21}}{2}$. Следователно $D > 0$ при $p \in \left(-\infty; \dfrac{3 - \sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3 + \sqrt{21}}{2}; +\infty\right)$.

б) Тъй като функцията $f(x)$ има два локални екстремума, достигащи се в точките x_1 и x_2, то от а) следва, че допустимите стойности за p са $p \in \left(-\infty; \dfrac{3 - \sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3 + \sqrt{21}}{2}; +\infty\right)$. От формулите на Виет за уравнението $3x^2 + 2px + p + 1 = 0$ получаваме, че $\left| \begin{array}{ll} x_1 + x_2 & = -\dfrac{2}{3}p \\ x_1 x_2 & = \dfrac{p+1}{3} \end{array} \right.$. Изразяваме

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{4}{9}p^2 - \frac{2}{3}(p+1) = \frac{4}{9}p^2 - \frac{2}{3}p - \frac{2}{3} = \frac{22}{9} \Leftrightarrow 2p^2 - 3p - 14 = 0.$$

Корените на последното уравнение са $p_3 = \dfrac{7}{2}$ и $p_4 = -2$. От тях само -2 е в дефиниционната област, значи $p = -2$. Търсим пресечната точка на $f(x)$ и $g(x)$ за така намерената стойност на p. Имаме, че $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 5$ и

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 5 = x^3 - 2x^2 - 3x + 7 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

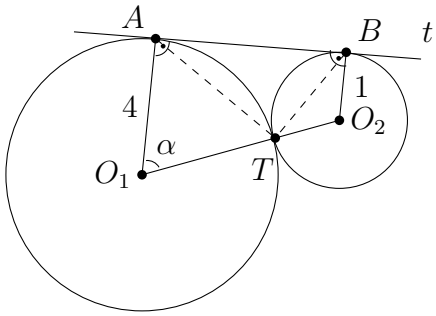
Следователно графиките на двете функции имат точно една пресечна точка с абсциса $x_0 = 1$. Производната на функцията $f(x)$ при $p = -2$ е $f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$. Тогава ъгловият коефициент на допирателната в точката x_0 е

$$k = f'(x_0) = f'(1) = 3.1 - 4.1 - 1 = -2.$$

. . . . . .

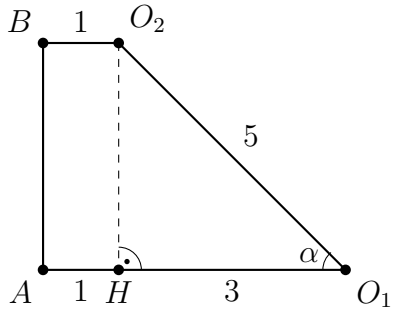
Задача 14. Дадени са окръжност k_1 с център O_1 и радиус $R = 4$ и окръжност k_2 с център O_2 и радиус $r = 1$, които се допират външно в точката T. Правата t е тяхна обща външна допирателна като k_1 и k_2 се допират до t съответно в точките A и B. Да се намери лицето на триъгълник ABT.

Решение:



1) Означаваме $\sphericalangle AO_1O_2 = \alpha$. От това, че $AO_1 \perp t$ и $BO_2 \perp t$ следва, че $AO_1 \parallel BO_2$. Точките O_1, T и O_2 лежат на една права, откъдето следва, че $\sphericalangle O_1O_2B = 180^\circ - \alpha$.

2) Разглеждаме ABO_2O_1 - правоъгълен трапец. Построяваме $O_2H \perp AO_1$, $H \in AO_1$. От $\triangle O_1O_2H$ получаваме, че $\cos\alpha = \dfrac{O_1H}{O_1O_2} = \dfrac{3}{5}$.



3) **I н.** $S_{\triangle ABT} = S_{ABO_1O_2} - S_{\triangle AO_1T} - S_{\triangle BO_2T}$.
За ABO_1O_2, $O_2H = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.
$S_{ABO_1O_2} = \dfrac{1+4}{2} \cdot 4 = 10$.
За $\triangle AO_1T$, $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$ и $\sin\alpha > 0$, следователно $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}\cdot$ $S_{\triangle AO_1T} = \dfrac{R.R.\sin\alpha}{2} = 4.4 \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{32}{5}\cdot$ За $\triangle BO_2T$, $\sin(180^\circ - \alpha) = \dfrac{4}{5}$.
$S_{\triangle BO_2T} = 1.1 \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{5}\cdot$
$S_{\triangle ABT} = 10 - \dfrac{32}{5} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{16}{5}\cdot$

II н. От $\triangle AO_1T$ по косинусова теорема $AT^2 = 4^2 + 4^2 - 2.4.4 \cdot \dfrac{3}{5} \Rightarrow AT = \dfrac{8}{\sqrt{5}}\cdot$ От $\triangle BO_2T$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}\cdot$ $BT^2 = 1^2 + 1^2 + 2.1.1 \cdot \dfrac{3}{5} \Rightarrow BT = \dfrac{4}{\sqrt{5}}\cdot$ За $\triangle ABT$, $\sphericalangle ATB = 180^\circ - \left(\dfrac{180^\circ - \alpha}{2}\right) - \dfrac{\alpha}{2} = 90^\circ \Rightarrow AT \perp BT$. $S_{\triangle ATB} = \dfrac{AT.BT}{2} = \dfrac{16}{5}\cdot$

. . . . . .

Задача 15. Да се реши системата $\left| \begin{array}{ll} x^{x+y} & = y^{x-y} \\ x^2y & = 1 \end{array} \right.$, $x > 0$.

Решение:

I н.

1) Нека $x = 1 \Rightarrow y = \dfrac{1}{x^2} = 1$. С непосредствена проверка се установява, че $x = y = 1$ е решение на системата.

2) При $x > 0$, $x \neq 1$, от второто уравнение получаваме, че $y > 0$. Логаритмуваме двете страни на първото уравнение при основа x :

$$\left| \begin{array}{l} \log_x x^{x+y} = \log_x y^{x-y} \\ y = \dfrac{1}{x^2} \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \log_x x^{x+y} = \log_x (x^{-2})^{x-y} \\ y = \dfrac{1}{x^2} \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x + y = -2(x - y) \\ y = \dfrac{1}{x^2} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} 3x = y \\ y = \dfrac{1}{x^2} \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x^3 = y \\ y = \dfrac{1}{x^2} \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} \\ y = \sqrt[3]{9} \end{array}\right. .$$

Окончателно, след рационализиране, решенията на системата са наредените двойки $(1;1)$ и $\left(\dfrac{\sqrt[3]{9}}{3}; \sqrt[3]{9}\right)$.

II н. От второто уравнение получаваме, че $y > 0$. Ако $y = 1$, то $x = 1$ и директно проверяваме, че $x = y = 1$ е решение на системата. Нека $y \neq 1$. Тогава и $x \neq 1$. Логаритмуваме с основа y първото уравнение. Изразяваме x от второто уравнение и получаваме, че $x = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$. Заместваме в системата и пресмятаме:

$$\left|\begin{array}{l} \log_y x^{x+y} = \log_y y^{x-y} \\ x^2 y = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} (x+y)\log_y x = x - y \\ x^2 y = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} (x+y)\log_y \dfrac{1}{\sqrt{y}} = x - y \\ x^2 y = 1 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2}(x+y) = x - y \\ x^2 y = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{ll} 3x & = y \\ x^2 y & = 1 \end{array}\right. .$$

Като заместим $3x = y$ във второто уравнение на последната система, получаваме, че $x^3 = \dfrac{1}{3}$, откъдето $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ и $y = 3x = \dfrac{3}{\sqrt[3]{3}}$. Окончателно, решенията на системата са наредените двойки $(1;1)$ и $\left(\dfrac{\sqrt[3]{9}}{3}; \sqrt[3]{9}\right)$.

III н. От второто уравнение следва, че $y > 0$. Логаритмуваме двете страни на първото уравнение с логаритъм с основа 10:

$$\left|\begin{array}{l} \lg x^{x+y} = \lg y^{x-y} \\ y = \dfrac{1}{x^2} \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} (x+y)\lg x = (x-y)\lg y \\ y = \dfrac{1}{x^2} \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \left(x + \dfrac{1}{x^2}\right)\lg x = \left(x - \dfrac{1}{x^2}\right)\lg x^{-2} \\ y = \dfrac{1}{x^2} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} \left(x + \dfrac{1}{x^2} + 2x - \dfrac{2}{x^2}\right)\lg x = 0 \\ y = \dfrac{1}{x^2} \end{array}\right. .$$

1сл. $\left|\begin{array}{l} \lg x = 0 \\ y = \dfrac{1}{x^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ll} x & = 1 \\ y & = 1 \end{array}\right. .$

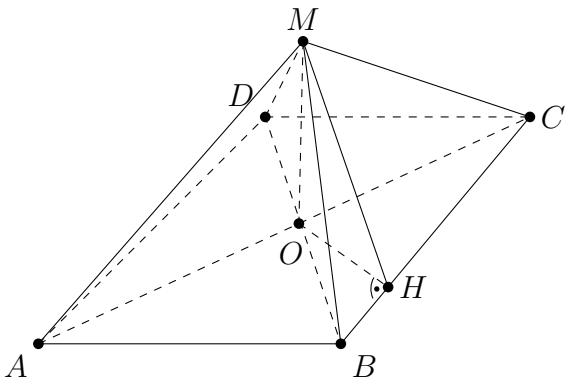
2сл. $\left|\begin{array}{l} 3x = \dfrac{1}{x^2} \\ y = \dfrac{1}{x^2} \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x^3 = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{1}{x^2} \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{ll} x & = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} \\ y & = \sqrt[3]{9} \end{array}\right.$. Решенията са $(1;1)$ и $\left(\dfrac{\sqrt[3]{9}}{3}; \sqrt[3]{9}\right)$.

. . . . . .

Задача 16. Основата на четириъгълна пирамида $ABCDM$ е успоредник $ABCD$ с диагонал $AC = 8$. Височината на пирамидата има дължина $\dfrac{12}{5}$. Всички нейни околни стени сключват с равнината на основата ъгли, равни на $45°$. Да се намери пълната повърхнина на пирамидата.

Решение:

1) Означаваме ортогоналната проекция на върха M в равнината $ABCD$ с O. Понеже всички двустенни ъгли при основата са равни, то точката O се намира на равни разстояния от четирите страни на $ABCD$. Тогава $ABCD$ може да се опише около окръжност с център т. O. Получаваме, че $ABCD$ е ромб с диагонали $AC \perp BD$ и т. $O = AC \cap BD$.



2) Нека т. $H \in BC$ е такава, че $OH \perp BC$. Разглеждаме $\triangle MOH$ - равнобедрен и правоъгълен. $MO = OH = \frac{12}{5}\cdot$ $MH = \frac{12}{5}\sqrt{2}$ - апотема на пирамидата.

3) Разглеждаме $\triangle BOC$ - правоъгълен. $CH^2 = CO^2 - OH^2 \Rightarrow CH = \frac{16}{5}\cdot$
$OH^2 = BH.CH \Rightarrow BH = \frac{9}{5} \Rightarrow BC = 5$ - основен ръб. $BO^2 = BC^2 - CO^2 \Rightarrow BO = 3 \Rightarrow$ $BD = 6$.

4) $S_1 = S + B$.
$S = 4 \cdot \frac{MH.BC}{2} = 24\sqrt{2}$,
$B = S_{ABCD} = \frac{AC.BD}{2} = 24$,
$S_1 = 24.(\sqrt{2} + 1)$.