СУ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ" – ФМИ
НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА
„ТУРНИР ПРОФ. БОРИСЛАВ БОЯНОВ"
20.02.2016 г.

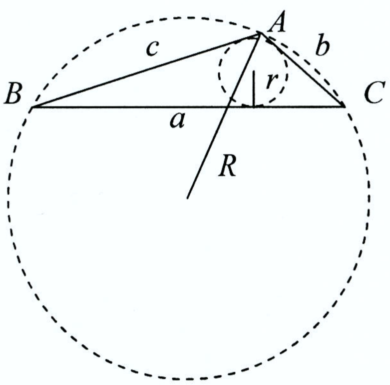
Задачи и примерни решения – първи кръг

1. Да се реши уравнението $x-6=\sqrt{x}$.

Решение. Уравнението има смисъл при $x\geq 0, x-6\geq 0$, т.е. при $x\geq 6$. Полагаме $y=\sqrt{x}\geq\sqrt{6}$ и получаваме квадратното уравнение $y^2-y-6=0$. Последното има за корени $y_1=3>\sqrt{6}$ и $y_2=-2<0$. Следователно даденото уравнение има за корен $x=9$.

2. В триъгълник ABC $\sphericalangle BAC=120^\circ$, а радиусите на вписаната окръжност и описаната окръжност имат дължини съответно $\sqrt{3}$ и $\frac{14\sqrt{3}}{3}$. Да се намерят дължините на страните на триъгълника.

Решение. Ще използваме стандартните означения за триъгълник. От синусовата теорема получаваме $a=2R\sin 120^\circ=2\frac{14\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}=14$. От косинусовата теорема получаваме $a^2=b^2+c^2-2bc\cos 120^\circ$, т.е. $b^2+c^2+bc=196$. От равенството $\frac{bc}{2}\sin 120^\circ=pr(=S(ABC))$ следва, че $bc=2(b+c+14)$. Полагаме $b+c=u, bc=v$ и получаваме системата $\left|\begin{array}{l}u^2-v=196\\ v=2u+28\end{array}\right.$, която има за решение $u=16, v=60$. Следователно $\left|\begin{array}{l}b+c=16\\ bc=60\end{array}\right.$. Така получаваме $a=14, b=10, c=6$ или $a=14, b=6, c=10$.

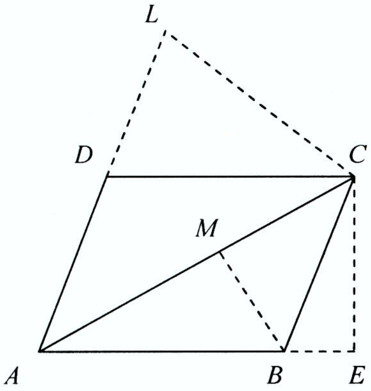


3. Да се реши неравенството $3^{x^2+14}\lg\left(x^2+1\right)\leq 3^{9x}\lg\left(x^2+1\right)$.

Решение: Допустими стойности са всички реални числа x. Записваме неравенството във вида $\left(3^{x^2+14}-3^{9x}\right)\lg\left(x^2+1\right)\leq 0$. От $x^2+1\geq 1$ следва, че $\lg\left(x^2+1\right)\geq \lg 1=0$, като равенството се достига при $x=0$. Тогава даденото неравенство, за $x\neq 0$, е еквивалентно на $3^{x^2+14}\leq 3^{9x}$, т.е. $x^2-9x+14\leq 0$. Последното има за решения $x\in[2;7]$. Следователно даденото неравенство има за решения $x=0$ и $x\in[2;7]$.

4. В успоредника $ABCD\,(AC>BD)$ са построени перпендикулярите CE $(E\in AB)$ и CL $(L\in AD)$. Да се пресметне стойността на израза $\frac{AB.AE+AD.AL}{AC^2}$.

Решение. Първи начин. Тъй като $AC > BD,$ то точките E и L са външни съответно за отсечките AB и $AD.$ Построяваме перпендикуляра $BM(M \in AC).$ $\triangle ABM \sim \triangle ACE$ по втори признак, откъдето $AB.AE = AM.AC.$ Аналогично, $\triangle CBM \sim \triangle CAL$ по втори признак, откъдето $BC.AL = CM.AC.$ От $BC = AD$ получаваме



$$\frac{AB.AE + AD.AL}{AC^2} = \frac{(AM + CM).AC}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} = 1.$$

Втори начин. От правоъгълните $\triangle AEC$ и $\triangle ALC$ имаме съответно $AE = AC\cos\sphericalangle BAC$ и $AL = AC\cos\sphericalangle DAC$. От косинусовата теорема за $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$ имаме съответно

$$AB.AC\cos\sphericalangle BAC = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2} \text{ и } AD.AC\cos\sphericalangle DAC = \frac{AC^2 + AD^2 - DC^2}{2}.$$

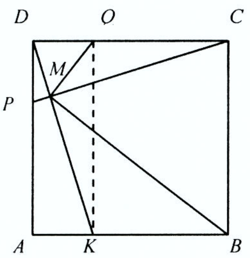
Оттук и $AB = DC$ и $BC = AD$ получаваме

$$\frac{AB.AE + AD.AL}{AC^2} = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2 + AC^2 + AD^2 - DC^2}{2AC^2} = 1.$$

5. Да се реши системата $\begin{vmatrix}(x^2+y^2)(x+y) = \frac{15}{2}xy \\ (x^4+y^4)(x^2+y^2) = \frac{85}{8}x^3y^3\end{vmatrix}.$

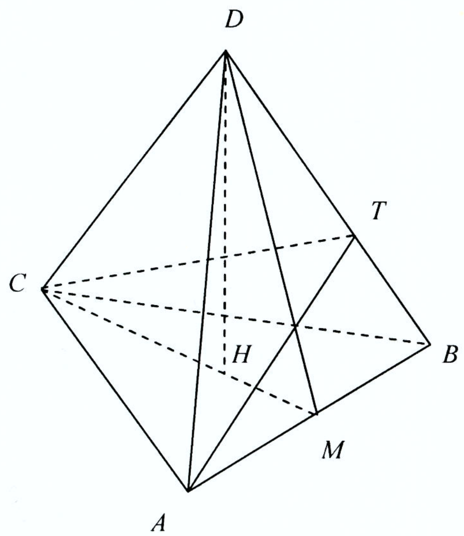
Решение. Лесно се вижда, че ако едно от неизвестните е нула, то и другото също е нула. Следователно $x = y = 0$ е решение на системата. Нека $xy \neq 0.$ Разделяме първото уравнение на $xy,$ а второто на x^3y^3 и получаваме $\begin{vmatrix}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)(x+y) = \frac{15}{2} \\ \left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) = \frac{85}{8}\end{vmatrix}.$ Полагаме $p = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ и $q = x + y$ и получаваме $\begin{vmatrix}pq = \frac{15}{2} \\ (p^2-2)p = \frac{85}{8}\end{vmatrix}.$ Второто уравнение на системата е еквивалентно на $8p^3 - 16p - 85 = 0.$ Последното уравнение го записваме във вида $8p^3 - 50p + 34p - 85 = 0.$ Групираме на множители $2p(4p^2 - 25) + 17(2p - 5) = 0,$ т.е. $(2p-5)(4p^2+10p+17) = 0.$ Това уравнение има единствен реален корен $p = \frac{5}{2}$ и следователно $q = 3.$ Решаваме системата $\begin{vmatrix}\frac{x}{y}+\frac{y}{x} = \frac{5}{2} \\ x + y = 3\end{vmatrix}$ и получаваме $x = 2, y = 1$ или $x = 1, y = 2.$

6. Върху страните AD и CD на квадрата $ABCD$ са взети съответно точки P и Q такива, че $DP = DQ.$ Ако правата DM $(M \in PC)$ е перпендикулярна на правата $PC,$ да се намери големината на $\sphericalangle BMQ.$



Решение. Нека правата DM пресича страната AB в точка K. От $\triangle AKD \cong \triangle DPC$ следва, че $AK = DP = DQ$, $KB = CQ$ и значи $KBCQ$ е правоъгълник. От $\sphericalangle KMC = 90^\circ$ следва, че точката M лежи на описаната около правоъгълника $KBCQ$ окръжност. Следователно $\sphericalangle BMQ = 90^\circ$.

7. В правилна триъгълна пирамида околна стена сключва с равнината на основата ъгъл, чийто косинус е равен на $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Да се намери големината на ъгъла, който сключват две околни съседни стени.



Решение. Нека пирамидата е $ABCD$, точката H е ортогоналната проекция на върха D върху равнината ABC, а точката M е средата на страната AB. От теоремата за трите перпендикуляра следва, че $DM \perp AB$ и следователно $\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$, където $\alpha = \sphericalangle HMD$. От $\triangle MHD$ и $\triangle ABC$ получаваме $\cos\alpha = \frac{HM}{DM} = \frac{CM}{3DM} = \frac{AB\sqrt{3}}{6DM}$, т.е. $AB = DM2\sqrt{2}$. От $\triangle BMD$ получаваме $BD^2 = DM^2 + \frac{AB^2}{4}$ и следователно $BD = DM\sqrt{3}$. Нека $AT \perp DB$ $(T \in DB)$. Тогава ъгълът, който сключват околните съседни стени ABD и BCD, е $\sphericalangle ATC = \beta$. От косинусовата теорема за $\triangle ATC$ получаваме $\cos\beta = \frac{2AT^2 - CA^2}{2AT^2} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{CA}{AT}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AT}\right)^2$. От равенството $AT.BD = DM.AB$ следва, че $\frac{AB}{AT} = \frac{BD}{DM} = \sqrt{3}$. Оттук $\cos\beta = -\frac{1}{2}$ и следователно големината на търсения ъгъл е 120°.

8. Нека реалните числа x и y са решения на уравнението

$$\lg(x-1) + \lg(x-3) = \lg(y+1) + \lg(2-y).$$

Да се намери най-голямата стойност на $6x + 4y$.

Решение. Първи начин. За да има смисъл уравнението трябва $x-1>0$, $x-3>0$, $y+1>0$ и $2-y>0$, т.е. $x>3$ и $-1<y<2$. Тогава то е еквивалентно на $(x-1)(x-3) = (y+1)(2-y)$, т.е $x^2 - 4x + y^2 - y + 1 = 0$. Нека $z = 6x + 4y$. Изразяваме $y = \frac{z-6x}{4}$, заместваме в уравнението $x^2 - 4x + y^2 - y + 1 = 0$ и получаваме $52x^2 - 4(10+3z)x + z^2 - 4z + 16 = 0$. За да има последното уравнение (относно x) реални корени, неговата дискриминанта трябва да е неотрицателна, т.е.

$D=4(3z+10)^2-52(z^2-4z+16)\geq 0,$ откъдето получаваме $-16z^2+448z-432\geq 0,$ т.е. $z^2-28z+27\leq 0.$ Последното неравенство е изпълнено за $1\leq z\leq 27.$ Следователно най-голямата стойност на $6x+4y$ е равна на $27,$ като тя се достига за $x=\frac{7}{2}$ и $y=\frac{3}{2}.$

Втори начин. За да има смисъл уравнението трябва $x-1>0,$ $x-3>0,$ $y+1>0$ и $2-y>0,$ т.е. $x>3$ и $-1<y<2$. Тогава то е еквивалентно на $(x-1)(x-3)=(y+1)(2-y),$ т.е $x^2-4x+y^2-y+1=0.$ Тъй като $x>3$, от последното равенство следва $x=2+\sqrt{-y^2+y+3}$ и значи $6x+4y=12+6\sqrt{-y^2+y+3}+4y=f(y)$. Имаме $f'(y)=\frac{-6y+3+4\sqrt{-y^2+y+3}}{\sqrt{-y^2+y+3}}$. Оттук $f'(y)=0$ тогава и само тогава, когато $4\sqrt{-y^2+y+3}=6y-3$. Повдигаме двете страни на квадрат и получаваме $-16y^2+16y+48=36y^2-36y+9$, т.е. $4y^2-4y-3=0$, откъдето $y_1=-\frac{1}{2}$ и $y_2=\frac{3}{2}$. С директна проверка установяваме, че единственият корен на $f'(y)$ е $y=\frac{3}{2}$. Вземайки предвид дефиниционната област $-1<y<2$, имаме, че $f'(y)>0$ за $y\in\left(-1;\frac{3}{2}\right)$ и $f'(y)<0$ за $y\in\left(-1;\frac{3}{2}\right)$ и значи $f(y)$ има максимум при $y=\frac{3}{2}$. Следователно най-голямата стойност на $6x+4y$ е равна на $27,$ като тя се достига при $x=\frac{7}{2}$ и $y=\frac{3}{2}.$