



**СУ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“ – ФМИ**  
**НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ЕЛЕМЕНТАРНА**  
**МАТЕМАТИКА**  
**„ТУРНИР ПРОФ. БОРИСЛАВ БОЯНОВ“**  
**19.03.2016 г.**

**Задачи и примерни решения – втори кръг**

**1.** Да се реши уравнението  $(x+1)^2 2^{x+2} + 2^{|x-2|+2} = (x+1)^2 2^{|x-2|+4} + 2^x$ .

*Решение.* Ако  $x \geq 2$ , то даденото уравнение е еквивалентно на

$(x+1)^2 2^{x+2} + 2^x = (x+1)^2 2^{x+2} + 2^x$  и следователно всяко  $x \geq 2$  е решение. Ако  $x < 2$ , то

даденото уравнение е еквивалентно на  $(4(x+1)^2 - 1)2^x = (4(x+1)^2 - 1)2^{4-x}$ , т.е на

$(4(x+1)^2 - 1)(2^x - 2^{4-x}) = 0$ . Последното равенство е изпълнено, когато  $4(x+1)^2 - 1 = 0$

или  $2^x - 2^{4-x} = 0$ . Първото уравнение има за решения  $x_1 = -\frac{1}{2} < 2$  и  $x_2 = -\frac{3}{2} < 2$ , а

второто уравнение няма решения, по-малки от 2. Следователно решенията са

$x_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $x_2 = -\frac{3}{2}$  и всяко  $x \geq 2$ .

**2.** Четириъгълникът  $ABCD$  е вписан в окръжност. Означаваме с  $D_1, A_1, B_1$  и  $C_1$  центровете на окръжностите, вписани съответно в триъгълниците  $ABC, BCD, CDA$  и  $DAB$ . Да се намерят ъглите на четириъгълника  $A_1B_1C_1D_1$ .

*Решение.* Означаваме

$\widehat{AB} = 2\alpha$ ,  $\widehat{BC} = 2\beta$ ,  $\widehat{CD} = 2\gamma$  и  $\widehat{AD} = 2\delta$ . Ако

точките  $M$  и  $N$  са среди съответно на  $\widehat{CD}$  и

$\widehat{BC}$ , то точката  $A_1$  е пресечна точка на  $DN$  и

$BM$ . Тогава  $\angle AMB = \alpha$ , а от равенството

$MB_1 = MA_1$  (Защо?) следва, че

$\angle B_1A_1M = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ .  $\angle AND = \delta$  и от равенството

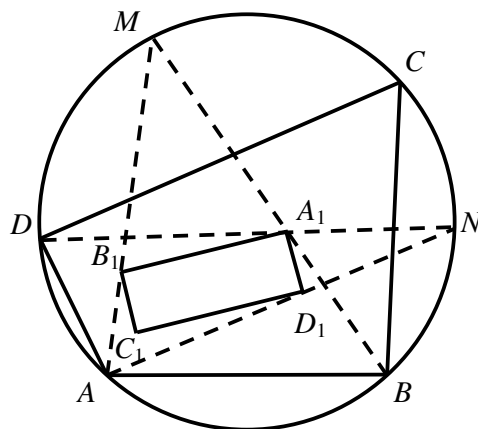
$NA_1 = ND_1$  следва, че  $\angle D_1A_1N = 90^\circ - \frac{\delta}{2}$ .

Пресмятаме

$\angle BA_1N = \frac{1}{2}(\widehat{BN} + \widehat{DM}) = \frac{1}{4}(\widehat{BC} + \widehat{CD}) = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$ .

Следователно  $\angle BA_1D_1 = 90^\circ - \frac{1}{2}(\beta + \gamma + \delta)$  (Защо?). Тогава

$\angle B_1A_1D_1 = 180^\circ - \angle B_1A_1M - \angle BA_1D_1$ . След заместване, получаваме



$\sphericalangle B_1 A_1 D_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 90^\circ$ . Аналогично получаваме, че и останалите ъгли са равни на  $90^\circ$  и следователно четириъгълникът  $A_1 B_1 C_1 D_1$  е правоъгълник.

**3.** Да се намерят стойностите на реалния параметър  $a$ , за които неравенството  $ax^4 + 96x^3 + 84x^2 + 28x + 3 \geq 0$  е изпълнено за всяко реално число  $x$ .

*Решение.* Неравенството е изпълнено за  $x = 0$ . Нека  $x \neq 0$  и да положим  $x = \frac{1}{y}$ . Тогава

$$ax^4 + 96x^3 + 84x^2 + 28x + 3 = \frac{3y^4 + 28y^3 + 84y^2 + 96y + a}{y^4} \text{ и т.к. } y^4 > 0, \text{ остава да намерим}$$

стойностите на  $a$ , за които неравенството  $f(y) = 3y^4 + 28y^3 + 84y^2 + 96y + a \geq 0$  е изпълнено за всяко  $y$ . Пресмятаме

$$f'(y) = 12y^3 + 84y^2 + 168y + 96 = 12(y+4)(y+2)(y+1).$$

От метода на интервалите следва, че  $f'(y) < 0$  при  $y < -4$  или  $-2 < y < -1$ , и  $f'(y) > 0$  при  $-4 < y < -2$  или  $y > -1$ . Следователно  $f(y)$  има два локални минимума при  $y = -4$  и  $y = -1$  и по-малката от двете стойности,  $f(-4)$  и  $f(-1)$ , ще бъде най-малката стойност на  $f(y)$ . Следователно  $f(y) \geq 0$  за всяко  $y$ , когато са изпълнени  $f(-4) \geq 0$  и  $f(-1) \geq 0$ , т.е. съответно при  $a \geq 64$  и  $a \geq 37$ . Окончателно при  $a \geq 64$  е изпълнено условието на задачата.

**4.** В осмоъгълника  $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 A_8$  всички ъгли са равни, а дължините на страните му са рационални числа. Да се докаже, че той има център на симетрия.

*Решение.* Означаваме  $A_i A_{i+1} = a_i, i = 1 \dots 8$ ,

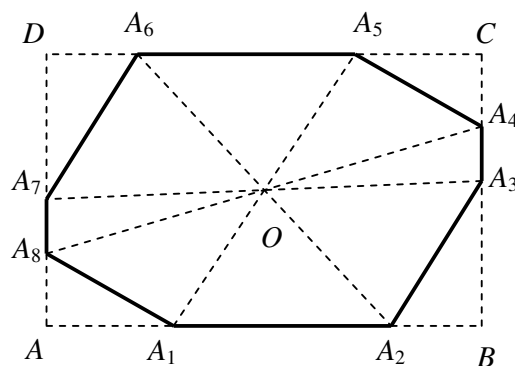
където  $A_9 \equiv A_1$ . От това, че всички ъгли са равни следва, че те са по  $135^\circ$ . Нека правите  $A_1 A_2$  и  $A_5 A_6$  пресичат правите  $A_3 A_4$  и  $A_7 A_8$ , съответно в точки  $B$  и  $A$ , и  $C$  и  $D$ . От това, че ъглите на осмоъгълника са равни на  $135^\circ$  следва, че четириъгълникът  $ABCD$  е правоъгълник. Пресмятаме

$$AB = \frac{a_8}{\sqrt{2}} + a_1 + \frac{a_2}{\sqrt{2}}, CD = \frac{a_7}{\sqrt{2}} + a_5 + \frac{a_6}{\sqrt{2}},$$

$$AD = \frac{a_8}{\sqrt{2}} + a_7 + \frac{a_6}{\sqrt{2}} \text{ и } BC = \frac{a_2}{\sqrt{2}} + a_3 + \frac{a_7}{\sqrt{2}}. \text{ От}$$

$$AB = CD \text{ и } BC = AD \text{ следва, че } a_1 - a_5 = (a_7 + a_6 - a_2 - a_8) \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ и}$$

$$a_3 - a_7 = (a_8 + a_6 - a_2 - a_7) \frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ Т.к. } a_i, i = 1, \dots, 8 \text{ са рационални числа, то}$$



$$\begin{cases} a_1 - a_5 = 0 \\ a_3 - a_7 = 0 \\ a_7 + a_6 - a_2 - a_8 = 0 \\ a_8 + a_6 - a_2 - a_7 = 0 \end{cases}, \text{ т.е. } a_i = a_{i+4}, i = 1 \dots 4. \text{ От } AB \parallel CD \text{ и } BC \parallel AD \text{ следва, че}$$

четириъгълниците  $A_1A_2A_5A_6$  и  $A_3A_4A_7A_8$  са успоредници. Аналогично се доказва, че и четириъгълниците  $A_1A_4A_5A_8$  и  $A_2A_3A_6A_7$  са успоредници. Оттук  $\triangle AA_1A_8 \cong \triangle CA_5A_4$  и значи  $AA_1 = CA_5$  и  $AA_8 = CA_4$ . Следователно  $A_1$  и  $A_8$  са симетрични съответно на  $A_5$  и  $A_4$  относно центъра на правоъгълника  $O$ . Аналогично  $A_2$  е симетрична на  $A_6$ , а  $A_3$  е симетрична на  $A_7$ . Следователно  $O$  е център на симетрия за осмоъгълника.

**5.** Нека  $a, b$  и  $c$  са дължините на страните на триъгълник, а  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  са съответните им срещуположни ъгли. Да се докаже, че ако  $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ , то  $(\gamma - \beta)a + (\alpha - \gamma)b + (\beta - \alpha)c \geq 0$ .

*Решение.* Ако някои два от ъглите са равни, то се достига равенството. Нека  $\alpha > \beta > \gamma$ . От синусовата теорема получаваме

$(\gamma - \beta)a + (\alpha - \gamma)b + (\beta - \alpha)c = 2R((\gamma - \beta)\sin \alpha + (\alpha - \gamma)\sin \beta + (\beta - \alpha)\sin \gamma)$ . След преобразуване даденият израз е еквивалентен на

$$(\gamma - \beta)a + (\alpha - \gamma)b + (\beta - \alpha)c = 2R(\alpha - \beta)(\beta - \gamma) \left( \frac{\sin \beta - \sin \gamma}{\beta - \gamma} - \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\alpha - \beta} \right). \text{ От теоремата}$$

на Лагранж за функцията  $\sin x$  следва, че съществуват числа  $z_1 \in (\beta; \alpha)$  и  $z_2 \in (\gamma; \beta)$

такива, че  $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\alpha - \beta} = \cos z_1$  и  $\frac{\sin \beta - \sin \gamma}{\beta - \gamma} = \cos z_2$ . Тогава

$$(\gamma - \beta)a + (\alpha - \gamma)b + (\beta - \alpha)c = 2R(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\cos z_2 - \cos z_1) > 0, \text{ защото}$$

$$0 < \gamma < z_2 < \beta < z_1 < \alpha < \pi.$$