Софийски Университет „Св. Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика

Национално състезание по елементарна математика

„Турнир проф. Борислав Боянов"

Първи кръг, 08 февруари 2015

Задача 1. Да се реши уравнението:

$$\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 4} = \sqrt{2x^2 - 2x + 9}\,.$$

Задача 2. Периметърът на триъгълника ABC е равен на 9. Правата A_1B_1 ($A_1 \in AC$, $B_1 \in BC$) отсича от $\Delta\, ABC$ триъгълник A_1B_1C с периметър 4. Да се намери дължината на AB, ако в четириъгълника ABB_1A_1 може да се впише окръжност.

Задача 3. Да се намери броят на различните (т. е. нееднакви) триъгълници, всички страни на които са с дължини равни на числа от множеството $\{1,\, 3,\, 4,\, 5,\, 7\}$.

Задача 4. Да се намери максималното лице на четириъгълник, две от страните на който имат дължина 5, а другите две са с дължина 6.

Задача 5. Даден е четириъгълник $ABCD$, за който AC е ъглополовяща на $\sphericalangle\, BAD = 120^\circ$, $AB = 5$, $AC = 9$ и $AD = 4$. Да се докаже, че около четириъгълника $ABCD$ може да се опише окръжност, и да се намери дължината на радиуса ѝ.

Задача 6. Да се реши неравенството:

$$\log_{5x+3}{(3x+7)^2} + \log_{3x+7}{(5x+3)^2} \le 5\,.$$

Задача 7. Нека $ABCD$ е триъгълна пирамида, за която $AB = CD = 16$, а останалите ѝ ръбове са с дължина 14. Да се намери радиусът на описаната около пирамидата сфера.

Задача 8. Дадено е уравнението

$$x^4 + x^2 - a\,x - 3 = 0\,,$$

където a е реален параметър. Да се докаже, че уравнението има точно два реални корена, и да се намери a, ако сумата им е равна на 1.