СУ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“ – ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА

„ТУРНИР ПРОФ. БОРИСЛАВ БОЯНОВ“

08 февруари 2015 г.

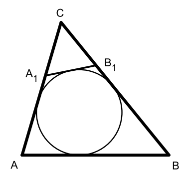
УСЛОВИЯ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

Задача 1. Да се реши уравнението $\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-x+4}=\sqrt{2x^2-2x+9}$.

Решение: Полагаме $y:=x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\geq\dfrac{3}{4}$, при което получаваме уравнението $\sqrt{y}+\sqrt{y+3}=\sqrt{2y+7}$. Повдигане на квадрат и получаваме еквивалентното уравнение $\sqrt{y}\,\sqrt{y+3}=2$. След още едно вдигане на квадрат получаваме ново еквивалентно уравнение $y^2+3y-4=0$ с корени $y_1=-4$ и $y_2=1$. Само y_2 изпълнява условието $y\geq 3/4$, следователно е изпълнено уравнението $x^2-x+1=1$. Корените му $x_1=0$ и $x_2=1$ са решенията на даденото уравнение.

Задача 2. Периметърът на триъгълника ABC е равен на 9. Правата A_1B_1 ($A_1\in AC$, $B_1\in BC$) отсича от ΔABC триъгълник A_1B_1C с периметър 4. Да се намери дължината на AB, ако в четириъгълника ABB_1A_1 може да се впише окръжност.

Решение: От $AB+BC+CA=9$ и $A_1B_1+B_1C+CA_1=4$ след почленно изваждане получаваме $(AB-A_1B_1)+(BC-B_1C)+(CA-CA_1)=5=AB-A_1B_1+AA_1+BB_1$. Тъй като четириъгълникът ABB_1A_1 е описан около окръжност, имаме $AB+A_1B_1=BB_1+AA_1$, следователно $5=AB-A_1B_1+(BB_1+AA_1)=AB-A_1B_1+(AB+A_1B_1)=2AB$. От тук намираме $AB=\dfrac{5}{2}$.



Задача 3. Да се намери броят на различните (т.е. нееднакви) триъгълници, всички страни на които са с дължини равни на числа от множеството $\{1, 3, 4, 5, 7\}$.

Решение: Необходимото и достатъчно условие за това три положителни числа $a\leq b\leq c$ да са дължини на страни на триъгълник е да е изпълнено $c<a+b$. Броят на всичките нееднакви триъгълници е 23, като в това число влизат:

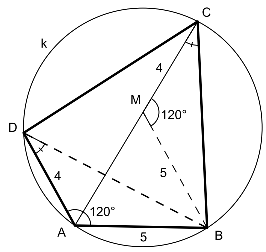
- 5 равностранни триъгълника с дължини на страните 1, 3, 4, 5 и 7;
- 10 равнобедрени триъгълника, в които основата е по-малка от бедрото, това са триъгълниците с дължини на страните: $\{1,3,3\}$, $\{1,4,4\}$, $\{1,5,5\}$, $\{1,7,7\}$, $\{3,4,4\}$, $\{3,5,5\}$, $\{3,7,7\}$, $\{4,5,5\}$, $\{4,7,7\}$ и $\{5,7,7\}$;
- 5 равнобедрени триъгълника с основа по-голяма от бедрото, това са триъгълниците с дължини на страните: $\{4,3,3\}$, $\{5,3,3\}$, $\{5,4,4\}$, $\{7,4,4\}$ и $\{7,5,5\}$;
- 3 триъгълника с различни дължини на страните: $\{3,4,5\}$, $\{3,5,7\}$ и $\{4,5,7\}$.

Задача 4. Да се намери максималното лице на четириъгълник, две от страните на който имат дължина 5, а другите две са с дължина 6.

Решение: Възможни са два случая: 1) двойките равни страни са срещуположни; 2) двойките равни страни са съседни. В първия случай четириъгълникът е успоредник, измежду успоредниците с дадени страни най-голямо лице има правоъгълникът. При даденото в задачата това максимално лице е 30. Във втория случай диагоналът през върховете, от които излизат равни страни, разделя четириъгълника на два еднакви триъгълника. Измежду триъгълниците с две дадени страни най-голямо лице има правоъгълният, с прав ъгъл между дадените страни. При даденото в задачата това максимално лице е 15, а максималното лице за четириъгълника — 30.

Задача 5. Даден е четириъгълник $ABCD$, за който AC е ъглополовяща на $\sphericalangle BAD = 120°$, $AB = 5$, $AC = 9$ и $AD = 4$. Да се докаже, че около четириъгълника $ABCD$ може да се опише окръжност, и да се намери дължината на радиуса ѝ.

Решение: Върху диагонала AC построяваме точка M, такава че $AM = 5$. Триъгълникът ABM е равностранен и $BM = 5$, $\sphericalangle BMC = 120°$ и $CM = AC - AM = 4$, следователно $\Delta ABD \cong \Delta MBC$ и $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB$. Получихме, че отсечката AB се вижда под един и същи ъгъл от точките C и D, т.е. четириъгълникът е вписан в окръжност k и тя се явява описана и около ΔABC.



От косинусовата теорема за ΔABC имаме $BC^2 = 5^2 + 9^2 - 2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cos 60°$ или $BC = \sqrt{61}$. Сега от синусовата теорема за ΔABC намираме радиуса R на k: $R = \dfrac{BC}{2\sin 60°} = \dfrac{\sqrt{183}}{3}$.

Забележка. От косинусовата теорема за ΔABD и ΔACD също можем да получим $BD = BC = CD = \sqrt{61}$, т.е. триъгълникът BCD е равностранен. Тогава $\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = 120° + 60° = 180°$ и следователно около $ABCD$ може да се опише окръжност.

Задача 6. Да се реши неравенството:

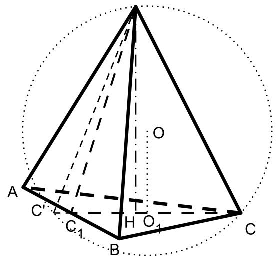
$$\log_{5x+3} (3x+7)^2 + \log_{3x+7} (5x+3)^2 \leq 5 .$$

Решение: Допустимите стойности за x определяме от изискванията $5x + 3 > 0$, $5x + 3 \neq 1$, $3x + 7 > 0$, $3x + 7 \neq 1$, откъдето намираме $x \in (-\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}) \cup (-\frac{2}{5}, \infty)$. Даденото неравенство е еквивалентно на $\log_{5x+3} (3x+7) + \log_{3x+7} (5x+3) \leq \frac{5}{2}$. Полагаме $y = \log_{3x+7} (5x+3)$ и използване на свойството $\log_{5x+3} (3x+7) = \frac{1}{\log_{3x+7}(5x+3)} = \frac{1}{y}$, за да получим неравенството $y + \frac{1}{y} \leq \frac{5}{2}$, чието решение е $y \in (-\infty, 0) \cup [\frac{1}{2}, 2]$. От тук следва, че за x трябва да е изпълнено или $\log_{3x+7} (5x+3) < 0$, или $\frac{1}{2} \leq \log_{3x+7} (5x+3) \leq 2$. Отбелязвайки, че при допустимите стойности на x за основата на логаритъма имаме $3x + 7 > 7 - \frac{9}{5} > 1$, извършваме антилогаритмуването, получавайки че трябва да е изпълнено или $0 < 5x + 3 < 1$, или $\sqrt{3x+7} \leq 5x + 3 \leq (3x+7)^2$. Първата система неравенства има решение $x \in (-\frac{3}{5}, -\frac{2}{5})$. Решението на лявото неравенство от втората система е $x \in (-\infty, -1) \cup [-\frac{2}{25}, \infty)$, а дясното е изпълнено за всяко x. Предвид допустимите стойности за x, решението на втората система от неравенства е $x \in [-\frac{2}{25}, \infty)$. Окончателно, решението на изходното неравенство е $x \in (-\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}) \cup [-\frac{2}{25}, \infty)$.

Задача 7. Нека $ABCD$ е триъгълна пирамида, за която $AB = CD = 16$, а останалите ѝ ръбове са с дължина 14. Да се намери радиусът на описаната около пирамидата сфера.

Решение: Нека C_1 е среда на страната AB. От еднаквостта на равнобедрените триъгълници ABD и ABC следва, че DC_1 и CC_1 са височини на ΔABD и ΔABC и $DC_1 = CC_1$. Така, равнината $(CC_1D) \perp AB$ и $(CC_1D) \perp (ABC)$. Следователно, проекцията H на върха D на пирамидата върху равнината (ABC) лежи върху CC_1 (DH е височината на пирамидата) и DH е височина в равнобедрения триъгълник CC_1D.

Нека O, R и O_1, R_1 са съответно центърът и радиусът на описаната около пирамидата сфера и центърът и радиусът на описаната около триъгълника ABC окръжност. Ясно е, че проекцията на точката O върху равнината на основата е точката O_1. Тогава точката $C' \not\equiv C$, която лежи върху CC_1 и описаната около ΔABC окръжност ($O_1C' = O_1C$) ще лежи върху описаната около пирамидата сфера. Тъй като равнината $CC'D$ съдържа O, то тя отсича от сферата голяма окръжност, която съвпада с описаната около триъгълника $CC'D$ окръжност, т.е. R съвпада с радиуса на тази окръжност. Пресмятаме последователно:



$$CC_1 = \sqrt{BC^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 2\sqrt{33}, \quad S_{CC_1D} = \frac{CD\sqrt{CC_1^2 - \frac{CD^2}{4}}}{2} = 16\sqrt{17}, \quad DH = \frac{2S_{CC_1D}}{CC_1} = 16\sqrt{\frac{17}{33}},$$

$$S_{ABC} = \frac{AB.CC_1}{2} = 16\sqrt{33}, \quad R_1 = \frac{AB.AC.BC}{4S_{ABC}} = \frac{49}{\sqrt{33}}, \quad CC' = 2R_1 = \frac{98}{\sqrt{33}},$$

$$\sin\sphericalangle C'CD = \sin\sphericalangle HCD = \frac{HD}{CD} = \sqrt{\frac{17}{33}}, \quad \cos\sphericalangle C'CD = \sqrt{1-\sin^2\sphericalangle C'CD} = \frac{4}{\sqrt{33}},$$

$$C'D^2 = C'C^2 + CD^2 - 2C'C.CD.\cos\sphericalangle C'CD = \frac{1836}{11}, \quad C'D = 6\sqrt{\frac{51}{11}}, \quad R = \frac{C'D}{2\sin\sphericalangle C'CD} = 9.$$

Задача 8. Дадено е уравнението

$$x^4 + x^2 - ax - 3 = 0,$$

където a е реален параметър. Да се докаже, че уравнението има точно два реални корена, и да се намери a, ако сумата им е равна на 1.

Решение: Очевидно $x = 0$ не е корен на даденото уравнение, и при $x \neq 0$ то е еквивалентно на уравнението $\varphi(x) = a$, където $\varphi(x) := x^3 + x - \frac{3}{x}$. Функцията φ е непрекъсната и строго монотонно растяща в интервалите $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$; монотонността следва от $\varphi'(x) = 3x^2 + 1 + \frac{3}{x^2} > 0$. От тук и от

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x) = -\infty, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\varphi(x) = +\infty, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\varphi(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = +\infty$$

получаваме, че уравнението $\varphi(x) = a$, а следователно и изходното уравнение, има точно един отрицателен корен x_1 и точно един положителен корен x_2. Нека $x_1 + x_2 = 1$, и да означим $x_1 x_2 =: b$, $b < 0$, тогава

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 - ax - 3 &= (x - x_1)(x - x_2)(x^2 + cx + d) = (x^2 - x + b)(x^2 + cx + d) \\ &= x^4 + (c-1)x^3 + (b+d-c)x^2 + (bc-d)x + bd. \end{aligned}$$

Приравнявайки коефициентите пред еднаквите степени на x, получаваме последователно $c = 1$, $b + d = 2$, $d - b = a$ и $bd = -3$. Следователно b и d са корените на квадратното уравнение $t^2 - 2t - 3 = 0$, и понеже $b < 0$, намираме $b = -1$ и $d = 3$, а от тук $a = d - b = 4$.