Софийски Университет „Св. Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика

Национално състезание по елементарна математика

„Турнир проф. Борислав Боянов"

Втори кръг, 8 март 2015

Задача 1. Сутринта преди да отиде на училище, ученикът Иван Калитков написал бележка на баща си с молба да му остави пари, за да си купи чифт нови маратонки, като написал точната им цена. Като се върнал от училище, Калитков с удоволствие установил, че разсеяният му баща е разменил количествата на левовете и на стотинките от бележката. Иван бързо пресметнал, че оставените от баща му пари стигат да си купи два чифта маратонки, и ще му останат 1 лев и 50 стотинки. Колко струва чифт маратонки ?

Задача 2. Даден е триъгълник ABC, за който $AC > BC$, $\sphericalangle ACB = \gamma$ и $\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{2}{3}$. Симетралата s на страната AB и ъглополовящата l на $\sphericalangle ACB$ се пресичат в точка N и $S_{ABN} : S_{ABC} = 1 : 2$. Точките L и H са съответно пети на ъглополовящата и височината през върха C и $CL = 2\sqrt{13}$. Да се намери дължината на отсечката HB.

Задача 3. Да се реши системата:

$$\left|\begin{array}{l} 2x^2 - 4x + 2 = y \\ 2y^2 - 4y + 2 = z \\ 2z^2 - 4z + 2 = x\,. \end{array}\right.$$

Задача 4. Нека $P(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ е полином с реални коефициенти, такъв че $\left|P\left(\pm\frac{1}{2}\right)\right| \le 1$ и $\left|P(\pm 1)\right| \le 1$. Да се намери $P(x)$, ако $P'(1) = 9$.

Задача 5. С $B(N)$ е означен броят на всички различни редици от цели числа

$$1 \le k_1 \le k_2 \le \cdots \le k_N \le N$$

(редиците $\{k_1, k_2, \ldots, k_N\}$ и $\{k'_1, k'_2, \ldots, k'_N\}$ са различни, ако $k_i \neq k'_i$ за поне едно $i,\ 1 \le i \le N$).

а) С колко нули завършва десетичният запис на $B(2015)$?

б) Да се докаже, че съществуват безбройно много естествени числа N, за които последната цифра в десетичния запис на $B(N)$ е 5.

Време за работа 5 часа.