



Задачи и примерни решения

Задача 1. Да се реши уравнението:

$$\frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{29}{10} .$$

Решение. *Отговор:* $\frac{1}{2}, 2$

Полагаме $y = \frac{x}{x^2 + 1}$. При $y \neq 0$ полученото уравнение е еквивалентно на $10y^2 - 29y + 10 = 0$ с корени $\frac{2}{5}$ и $\frac{5}{2}$. Уравненията $\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{2}{5}$ и $\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{5}{2}$ са еквивалентни съответно на $2x^2 - 5x + 2 = 0$ и $5x^2 - 2x + 5 = 0$. Първото има корени $\frac{1}{2}$ и 2 , а второто няма решение.

Задача 2. Върху страните на триъгълник ABC са избрани точки $M \in AB$, $N \in BC$ и $P \in AC$ такива, че $AM : BM = 2 : 3$, $BN : CN = 1 : 4$, $AP : CP = 1 : 5$. Да се намери лицето на $\triangle MNP$, ако лицето на $\triangle ABC$ е 75.

Решение. *Отговор:* 11

Използваме стандартните означения за страните и ъглите в $\triangle ABC$. Имаме

$$AM = \frac{2c}{5}, BM = \frac{3c}{5}, BN = \frac{a}{5}, CN = \frac{4a}{5}, AP = \frac{b}{6}, CP = \frac{5b}{6},$$

$$\frac{S_{AMP}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{AM \cdot AP \cdot \sin \alpha}{2}}{\frac{AB \cdot AC \cdot \sin \alpha}{2}} = \frac{\frac{2c}{5} \cdot \frac{b}{6}}{cb} = \frac{1}{15}, \text{ т.е. } S_{AMP} = \frac{S_{ABC}}{15} = 5 ,$$

$$\frac{S_{BNM}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{BN \cdot BM \cdot \sin \beta}{2}}{\frac{BC \cdot AB \cdot \sin \beta}{2}} = \frac{\frac{a}{5} \cdot \frac{3c}{5}}{ac} = \frac{3}{25}, \text{ т.е. } S_{BNM} = \frac{3S_{ABC}}{25} = 9 ,$$

$$\frac{S_{CPN}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{CP \cdot CN \cdot \sin \gamma}{2}}{\frac{AC \cdot BC \cdot \sin \gamma}{2}} = \frac{\frac{5b}{6} \cdot \frac{4a}{5}}{ba} = \frac{2}{3}, \text{ т.е. } S_{CPN} = \frac{2S_{ABC}}{3} = 50 ,$$

$$S_{MNP} = S_{ABC} - S_{AMP} - S_{BNM} - S_{CPN} = 75 - 5 - 9 - 50 = 11 .$$

Задача 3. Да се намери сумата на целите числа, които са решения на уравнението:

$$\sqrt{x - 18\sqrt{x - 7} + 74} + \sqrt{x + 10\sqrt{x - 7} + 18} = 14 .$$

Решение. *Отговор:* 3895

Полагаме $u = \sqrt{x - 7} \geq 0$.

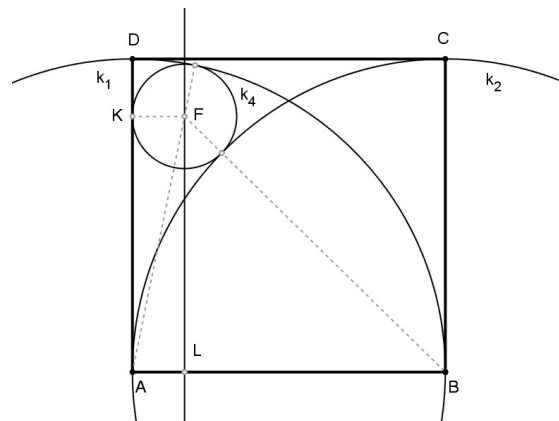
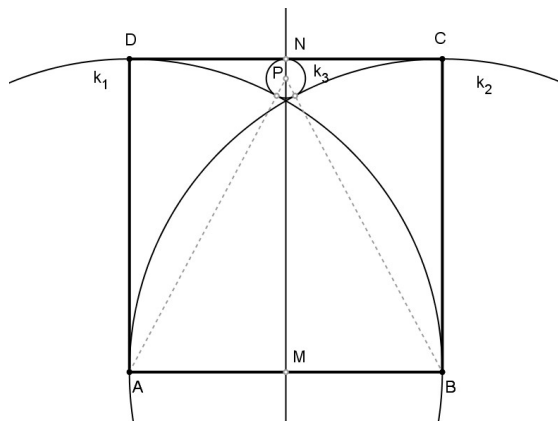
Тогава $x = u^2 + 7$, $x - 18\sqrt{x-7} + 74 = u^2 - 18u + 81 = (u-9)^2$,
 $x + 10\sqrt{x-7} + 18 = u^2 + 10u + 25 = (u+5)^2$, т.е. търсим неотрицателните решения
на уравнението $|u-9| + |u+5| = 14$.

При $u > 9$ лявата страна е $u-9+u+5 > 14$, т.е. нямаме решения строго по-големи
от 9, а при $0 \leq u \leq 9$ лявата страна е $-u+9+u+5 = 14$, т.е. всяко u от интервала $[0, 9]$
е решение. Множеството от стойностите на $u^2 + 7$ за $u \in [0, 9]$ е интервала $[7, 88]$, т.е.
всички решения на изходното уравнение са числата от този интервал. Целите решения
са $7 + k$, $k = 0, 1, 2, \dots, 81$ и сумата им е $82.7 + \frac{81.82}{2} = 3895$.

Задача 4. Дължината на страната на квадрат $ABCD$ е 1. Построени са две
окръжности: k_1 , с център A и радиус 1, и k_2 , с център B и радиус 1. Окръжност k_3 се
допира до k_1 , k_2 и страната CD във вътрешна за нея точка, а окръжност k_4 се допира
до k_1 , k_2 и страната AD във вътрешна за нея точка. Да се намерят радиусите на k_3 и
 k_4 .

Решение. Отговор: $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{16}$

Окръжността k_3 се допира до k_1 и k_2 външно, защото вътрешните за CD точки са
външни за k_1 и k_2 . Тогава $AP = BP = 1 + r$, където с P е означен центърът на k_3 ,
а r е дължината на радиуса ѝ. Следователно, P лежи на симетралата MN ($M \in AB$,
 $AM = BM$, $N \in CD$, $CN = DN$) на AB , която е симетрала и на CD , откъдето N
е допирната точка на k_3 до CD , т.е. $PN = r$. От правоъгълния триъгълник AMP
намираме $(1+r)^2 = (1-r)^2 + \frac{1}{4}$, откъдето $r = \frac{1}{16}$.



Окръжността k_4 се допира до k_1 вътрешно и до k_2 външно, защото вътрешните за
 AD точки са вътрешни за k_1 и външни за k_2 . Тогава $AF = 1 - R$ и $BF = 1 + R$, където с
 F е означен центърът на k_4 , а R е дължината на радиуса ѝ. Нека K е допирната точка на
 k_4 до AD , а L е петата на перпендикуляра F към AB . Тогава $ALFK$ е правоъгълник,
откъдето $AL = FK = R$. От правоъгълните триъгълници ALF и BLF намираме
 $(1-R)^2 - R^2 = LF^2 = (1+R)^2 - (1-R)^2$, откъдето $R = \frac{1}{6}$.

Задача 5. Цифрите на деветцифрено число са различни. Каква е вероятността
числото да се дели на 9?

Решение. Отговор: $\frac{17}{81}$

Броят на редиците от 9 различни цифри е $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 10!$. Деветцифрени
числа не представляват онези от тях, в които на първо място стои 0. Техният брой
е $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 9!$. Следователно, броят на деветцифрените с различни цифри е
 $10! - 9! = 9 \cdot 9!$.

Число се дели на 9 тогава и само тогава, когато сумата от цифрите му се дели
на 9. Сумата от всички цифри е $45=9 \cdot 5$ и, понеже в деветцифрено число с различни

цифри участват всички цифри без една, такова число се дели на 9 тогава и само тогава, когато липсващата цифра се дели на 9, т.е. тя е или 0, или 9. Броят на числата, в които не участва цифрата 0, е $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 9!$. Броят на числата, в които не участва цифрата 9, е $8 \cdot 8!$ (от общия брой редици $9!$ изваждаме броя на онези, които започват с 0, — $8!$). Търсената вероятност е $\frac{9! + 8 \cdot 8!}{9 \cdot 9!} = \frac{17}{81}$.

Задача 6. Да се реши неравенството:

$$|3x + 2|^{\log_{\sqrt{2}} |3x + 2|} < 4.$$

Решение. *Отговор:* $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{5}{6}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

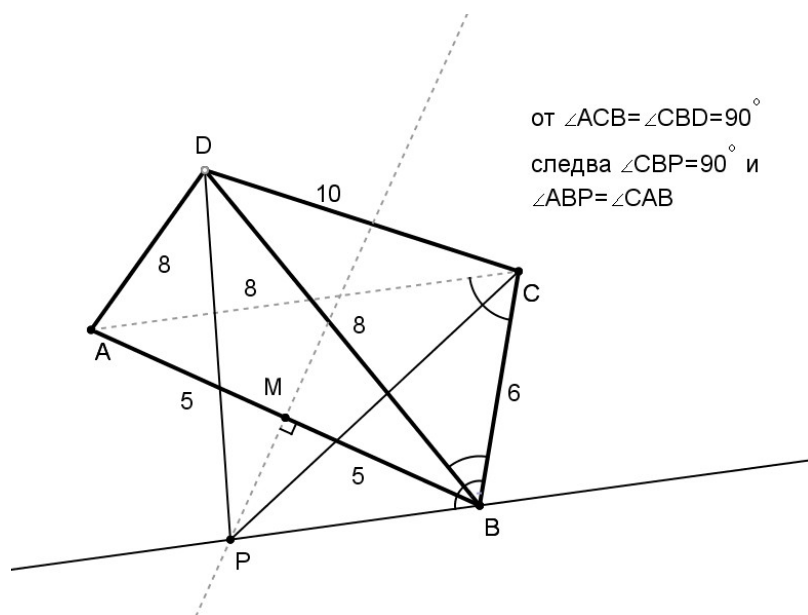
Функцията $\log_{\sqrt{2}} x$ е растяща, защото $\sqrt{2} > 1$. Понеже $4 = (\sqrt{2})^4$, даденото неравенство е еквивалентно на неравенството $(\log_{\sqrt{2}} |3x + 2|)^2 < 4$, което, от своя страна, е еквивалентно на системата неравенства $-2 < \log_{\sqrt{2}} |3x + 2| < 2$. Функцията $\sqrt{2}^x$ е растяща (заради $\sqrt{2} > 1$). Следователно последната система е еквивалентна на системата $\frac{1}{2} < |3x + 2| < 2$. Решенията на неравенството $\frac{1}{2} < |3x + 2|$ са $\left(-\infty, -\frac{5}{6}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, решенията на неравенството $|3x + 2| < 2$ са $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$, сечението на двете множества от решения е $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{5}{6}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

Задача 7. Дължините на ръбовете на триъгълна пирамида $ABCD$ са: $AC = AD = BD = 8$, $AB = CD = 10$, $BC = 6$.

Да се намери радиусът на вписаната в пирамидата сфера.

Решение. *Отговор:* $\frac{3\sqrt{399}}{24 + 5\sqrt{39}}$

За многостен, в който може да се впише сфера, между обема му V , повърхнината (пълна) му S и радиуса на вписаната сфера r е налице връзката $3V = rS$, която ще използваме (понеже във всяка триъгълна пирамида може да се впише сфера) за намиране на търсения радиус.



DBC и ACB са еднакви правоъгълни триъгълници, защото $10^2 = 6^2 + 8^2$, с катети 6 и 8, т.е. $S_{DBC} = S_{ACB} = 24$. ADB и DAC са еднакви равнобедрени триъгълници, с бедро 8 и основа 10, значи височината към основата е $\sqrt{8^2 - 5^2} = \sqrt{39}$, откъдето $S_{ADB} = S_{DAC} = 5\sqrt{39}$. Така, повърхнината на пирамидата е $S = 48 + 10\sqrt{39}$.

За да пресметнем обема, ни е необходима височина на пирамидата. Нека P е ортогоналната проекция на върха D в равнината ABC . От теоремата за трите перпендикуляра, поради $\angle DBC = 90^\circ$, получаваме $\angle PBC = 90^\circ$ и, следователно, $PB \parallel CA$. От друга страна $AD = BD$ ни дава $AP = BP$, т.е. P лежи на симетралата на AB . Ако с M е означена средата на AB , то триъгълниците BMP и ACB са подобни защото $\angle BMP = \angle ACB = 90^\circ$ и $\angle PBM = \angle BAC$, откъдето $\frac{BP}{AB} = \frac{BM}{AC}$ или $BP = \frac{25}{4}$. От правоъгълните триъгълници CBP и CPD последователно получаваме $CP^2 = BC^2 + BP^2 = \frac{24^2 + 25^2}{4^2} = \frac{1201}{16}$, $DP^2 = CD^2 - CP^2 = 10^2 - \frac{1201}{16} = \frac{399}{16}$, $DP = \frac{\sqrt{399}}{4}$ и $3V = DP \cdot S_{ABC} = 6\sqrt{399}$. Окончателно $r = \frac{3V}{S} = \frac{3\sqrt{399}}{24 + 5\sqrt{39}}$.

Задача 8. Определяме „дължина“ на множество, за някои ограничени множества от реални числа, по следния начин:

- дължината на празното множество е 0;
- дължината на интервал $((a, b), [a, b), (a, b]$ или $[a, b]$ е $b - a$;
- дължината на обединение на краен брой непересичащи се интервали е сумата на дължините на отделните интервали.

Да се намери максимално възможната дължина на множеството от решенията на неравенството:

$$|x^2 + 2px + q| < 1.$$

Решение. *Отговор:* $2\sqrt{2}$

Означаваме $a = q - p^2$. Числото x е решение на даденото неравенство, тогава и само тогава, когато $x + p$ е решение на неравенството $|t^2 + a| < 1$, т.е. множествата от решения на двете неравенства се получават едно от друго чрез трансляция, значи имат равни дължини.

Пресмятаме дължината $D(a)$ на множеството от решения на неравенството: $|t^2 + a| < 1$. То е еквивалентно на системата неравенства: $-a - 1 < t^2 < 1 - a$. При $a \geq 1$ дясното неравенство (значи и системата) няма решение, т.е. $D(a) = 0$.

При $-1 < a < 1$ всяко реално число е решение на лявото неравенство, а решенията на дясното (значи и на системата) са числата от интервала $(-\sqrt{1-a}, \sqrt{1-a})$, т.е. $D(a) = 2\sqrt{1-a}$.

При $a \leq -1$ решенията на лявото неравенство са $(-\infty, -\sqrt{-1-a}) \cup (\sqrt{-1-a}, +\infty)$, решенията на дясното неравенство са $(-\sqrt{1-a}, \sqrt{1-a})$, сечението на двете множества от решения е $(-\sqrt{1-a}, -\sqrt{-1-a}) \cup (\sqrt{-1-a}, \sqrt{1-a})$, т.е. $D(a) = 2(\sqrt{1-a} - \sqrt{-1-a})$.

Така определената функция $D(a)$ е непрекъсната, расте в интервала $(-\infty, -1]$ (защото $\sqrt{-1-a}$ и $\sqrt{1-a}$ са намаляващи, а $D(a) = \frac{4}{\sqrt{-1-a} + \sqrt{1-a}}$) и намалява в интервала $[-1, +\infty)$.

Следователно, най-голямата стойност на $D(a)$ е $D(-1) = 2\sqrt{2}$.