



Задачи и примерни решения

Задача 1. Да се намерят стойностите на параметъра a , за които уравнението

$$(x^2 + 4x + 4a + 52)^2 = 16a(5x^2 + 4x + 52)$$

има точно три различни реални решения.

Решение. *Отговор:* 4, 13

Преобразуваме уравнението

$$(x^2 + 4x + 52)^2 + 8a(x^2 + 4x + 52) + 16a^2 = 16a(x^2 + 4x + 52) + 64ax^2,$$

$$(x^2 + 4x - 4a + 52)^2 = 64ax^2.$$

Последното няма реални решения при $a \leq 0$. Търсим стойностите на a във вида $a = b^2$, $b > 0$. Уравнението придобива вида

$$(x^2 + 4(1 - 2b)x - 4b^2 + 52)(x^2 + 4(1 + 2b)x - 4b^2 + 52) = 0.$$

То има три различни реални решения, когато едно от двете квадратни уравнения

- $x^2 + 4(1 - 2b)x - 4b^2 + 52 = 0$, с дискриминанта $D_- = 16(5b^2 - 4b - 12)$
- $x^2 + 4(1 + 2b)x - 4b^2 + 52 = 0$, с дискриминанта $D_+ = 16(5b^2 + 4b - 12)$

има двоен корен, а другото има различни корени, или когато двете уравнения имат общ корен (и по два различни корена). Понеже $D_+ - D_- = 8b > 0$, то случаят $D_+ = 0$, $D_- > 0$ не е възможен. Уравнението $D_- = 0$, или $5b^2 - 4b - 12 = 0$, има единствен положителен корен $b = 2$, т.е. $a = 4$. Различните корени на изходното уравнение в този случай са -18 , -2 , 6 .

В случая на общ корен на двете уравнения, той (общият корен) е корен на уравнението

$$16bx = (x^2 + 4(1 + 2b)x - 4b^2 + 52) - (x^2 + 4(1 - 2b)x - 4b^2 + 52) = 0,$$

т.е. единствената възможност е $x = 0$. Тогава $a = b^2 = 13$, а различните корени на изходното уравнение са $-4(1 + 2\sqrt{13})$, 0 , $4(2\sqrt{13} - 1)$.

Задача 2. Да се намери целочислено решение на уравнението

$$k^3 = a^4 + (a + b)^4 + b^4, \quad \text{за което} \quad 0 < a < b.$$

Решение. *Отговор:* Например $k = 392$, $a = 28$, $b = 56$, $k = 392$, $a = 4$, $b = 72$.

Означаваме с d най-големия общо делител на a и b . Тогова $a = dx$, $b = dy$ за взаимно прости x и y . Уравнението добива вида $k^3 = d^4(x^4 + (x + y)^4 + y^4)$, специално при $x = 1$ и $y = 2$ имаме $k^3 = 98d^4$. Една от възможните стойности на d (най-малката), за която $2 \cdot 7^2 \cdot d^4$ е точен куб, е $d = 2^2 \cdot 7 = 28$.

Тогава $k = 392$, $a = 28$, $b = 56$.

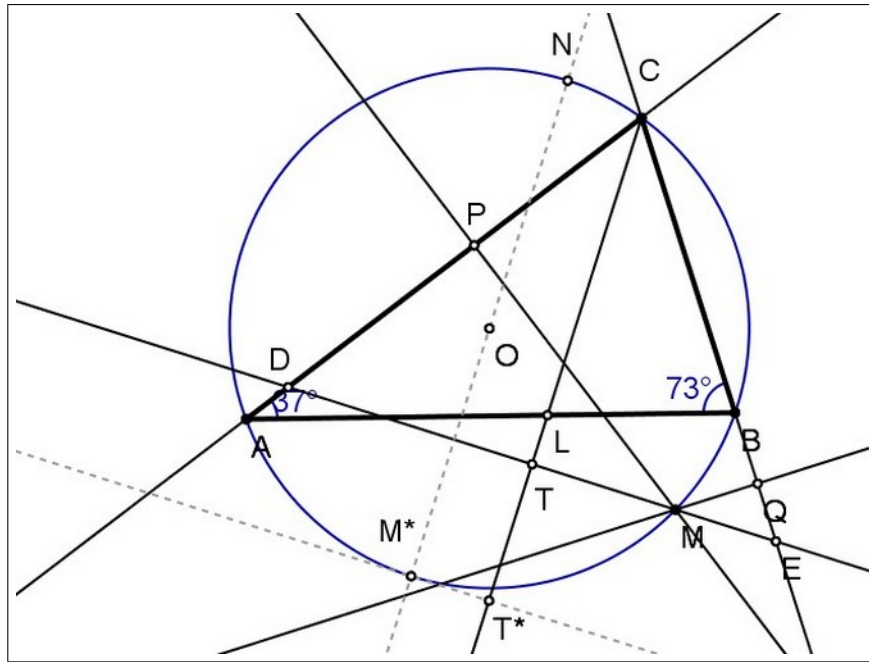
Забележка: Всеки избор на взаимно прости x и y дава решение (даже безкрайна редица от решения), посочени са решения с най-малко k и с най-малко a

Задача 3. Върху малката дъга AB на описаната около триъгълник ABC окръжност е избрана точка M . Нека MP и MQ са разстоянията от M до правите AC и BC .

Да се намери $\angle ACM$, за който сумата $MP + MQ$ е най-голяма, ако $\angle BAC = 37^\circ$ и $\angle ABC = 73^\circ$.

Решение. *Отговор:* $\angle ACM = 26^\circ$

Нека CL ($L \in AB$) е ъглополовящата на $\angle ACB$. През M прекарваме права, перпендикулярна на CL , и означаваме пресечните точки на тази права с правите CA , CL и CB с D , T и E . Тогава $CD = CE$ и за лицето на $\triangle DCE$ имаме от една страна $2S_{DCE} = 4S_{DCT} = 2CD \cdot CT \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$, а от друга $2S_{DCE} = 2S_{DCM} + 2S_{ECM} = CD \cdot MP + CE \cdot MQ = CD \cdot (MP + MQ)$, откъдето $MP + MQ = 2CT \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$. Понеже γ е фиксиран (70°), то сумата $MP + MQ$ е най-голяма, когато разстоянието CT от C до права, имаща обща точка с описаната окръжност и успоредна на фиксирана права (в случая на права, перпендикулярна на ъглополовящата CL), е най-голямо, което се достига в случая на единствена обща точка, т.е. правата MT е допирателна към окръжността. Това се постига, когато M съвпада с M^* , където M^*N е диаметър на описаната окръжност, успореден на ъглополовящата CL .



В случая, съответстващ на условието, $90^\circ > \angle ABC = \beta \geq \alpha = \angle BAC$ имаме от една страна (понеже M^*N е диаметър) $\angle NAC + \angle CAB + \angle LCB + \angle LCM^* = 90^\circ$, а от друга (понеже $M^*N \parallel CL$) $\angle NAC = \angle LCM^*$, откъдето $\angle LCM^* = \frac{\beta - \alpha}{4}$, при конкретните $\alpha = 37^\circ$ и $\beta = 73^\circ$ имаме $\angle LCM^* = 9^\circ$. Тогава $\angle ACM^* = \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta - \alpha}{4}$, при конкретните данни имаме $\angle ACM^* = 26^\circ$.

Задача 4. а) Да се докаже, че за всяко цяло число $1 \leq k \leq 99$ във всяко множество от 300 различни цели числа от интервала $[1, 500]$ има две числа с разлика, равна на k .

б) Вярно ли е, че във всяко множество от 300 различни цели числа от интервала $[1, 500]$ има две числа с разлика, равна на 100?

в) Вярно ли е, че във всяко множество от 300 различни цели числа от интервала $[1, 500]$ има две числа с разлика, равна на 101?

Решение. *Отговор:* б) НЕ ; в) ДА

а) Нека M е множество от 300 различни цели числа от интервала $[1, 500]$ и k е цяло число, $1 \leq k \leq 99$. С $M^{(+k)}$ означаваме множеството, чиито елементи се получават с прибавяне на k към елементите на M . Елементите на $M^{(+k)}$ са различни цели числа от интервала $[1+k, 500+k]$, значи и от интервала $[1, 599]$, в който са и всички елементи на M . Интервалът $[1, 599]$ съдържа 599 цели числа и, понеже общият брой на елементите на M и $M^{(+k)}$ е 600, двете множества имат общ елемент. Ако $n \in M$ и $n \in M^{(+k)}$, то има $m \in M$, за което $n = m + k$, т.е. разликата на $n \in M$ и $m \in M$ е равна на k .

б) Множеството, състоящо се от целите числа в интервалите $[1, 100]$, $[201, 300]$ и $[401, 500]$, има 300 елемента и разликата на всеки два от тях е или по-малка от 100 (когато са в един интервал), или по-голяма от 100 (когато са в различни интервали).

в) Нека M е множество от 300 различни цели числа от интервала $[1, 500]$. Разглеждаме множествата $A_p = \{p, p + 101, p + 202, p + 303, p + 404\}$, $p = 1, 2, 3, \dots, 96$ и $B_q = \{q, q + 101, q + 202, q + 303\}$, $q = 97, 98, 99, 100, 101$. Те съдържат всички цели числа от интервала $[1, 500]$. Ако допуснем, че във всяко A_p има най-много три елемента на M и във всяко B_q има най-много два елемента на M , то, понеже всеки елемент на M се съдържа само в едно от разглежданите множества, елементите на M биха били най-много $96 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 298$. M има 300 елемента, следователно в някое A_p има поне четири елемента на M (значи поне два последователни по големина, т.е. с разлика 101) или в някое B_q има поне три елемента на M (значи поне два последователни по големина, т.е. с разлика 101).

Задача 5. Да се намери най-голямото реално число R , за което неравенството

$$R \leq \frac{u}{x+v} + \frac{v}{y+u}$$

е изпълнено за всички неотрицателни x, y и положителни u, v , за които $x + y \leq u + v$.

Решение. *Отговор:* $\frac{2\sqrt{2}-1}{2}$.

Достатъчно е да намерим най-малката стойност на $F(x, u) = \frac{u}{x+1-u} + \frac{1-u}{1-x+u}$ за $0 \leq x \leq 1$ и $0 < u < 1$. Наистина,

$$\begin{aligned} \frac{u}{x+v} + \frac{v}{y+u} &= \frac{\frac{u}{u+v}}{\frac{x}{u+v} + \frac{v}{u+v}} + \frac{\frac{v}{u+v}}{\frac{y}{u+v} + \frac{u}{u+v}} \geq \\ &\geq \frac{\frac{u}{u+v}}{\frac{x}{u+v} + \frac{v}{u+v}} + \frac{\frac{v}{u+v}}{\frac{u+v-x}{u+v} + \frac{u}{u+v}} = \frac{\frac{u}{u+v}}{\frac{x}{u+v} + 1 - \frac{u}{u+v}} + \frac{1 - \frac{u}{u+v}}{1 - \frac{x}{u+v} + \frac{u}{u+v}}. \end{aligned}$$

За фиксирано $-1 < t < 1$ ще намерим минимума $M(t)$ на $F(x, u)$ за $0 \leq x \leq 1$, $0 < u < 1$ и $u - x = t$. Понеже $F(x, u) = \frac{2(u-x)u - (u-x) + 1}{1 - (u-x)^2} = \frac{2tu - t + 1}{1 - t^2}$, то

- при $t = 0$ имаме $F(x, u) = 1$, т.е. $M(0) = 1$;
- при $t > 0$ имаме, че $\frac{2tu - t + 1}{1 - t^2}$ расте с нарастването на u , т.е. имаме минимум за най-малкото u , което е $u = t$, защото $t \leq t + x = u < 1$, или $M(t) = \frac{2t^2 - t + 1}{1 - t^2}$;

- при $t < 0$ имаме, че $\frac{2tu - t + 1}{1 - t^2}$ намалява с нарастването на u , т.е. имаме минимум за най-голямото u , което е $u = t + 1$, защото $0 < u = t + x \leq t + 1$, или $M(t) = \frac{2t^2 + t + 1}{1 - t^2}$.

За да намерим най-малката стойност на $\frac{2t^2 - t + 1}{1 - t^2}$ за $0 < t < 1$ нека $\frac{2t^2 - t + 1}{1 - t^2} = -2 + \frac{1}{2p}$. Търсим най-голямата стойност на $p > 0$, за която уравнението $t^2 - 2pt + 6p - 1 = 0$ има решение в интервала $(0, 1)$. Абсцисата на върха на параболата е $p > 0$, а стойността на квадратния тричлен в 1 е $4p > 0$. Следователно, за наличие на корен в $(0, 1)$, е необходимо и достатъчно да са изпълнени $0 < p < 1$ и $-p^2 - 6p + 1 \leq 0$. Решенията на системата неравенства са числата от интервала $(0, 3 - 2\sqrt{2}]$, значи най-голямата стойност е $p = 3 - 2\sqrt{2}$, а най-малката стойност на $\frac{2t^2 - t + 1}{1 - t^2}$ за $0 < t < 1$ е $\frac{2\sqrt{2} - 1}{2}$. Поради симетрията относно ординатната ос, най-малката стойност на $\frac{2t^2 + t + 1}{1 - t^2}$ за $-1 < t < 0$ съвпада с най-малката стойност на $\frac{2t^2 - t + 1}{1 - t^2}$ за $0 < t < 1$.

Следователно, $F(x, u) \geq \frac{2\sqrt{2} - 1}{2}$, равенство се достига за $x = 0$ и $u = 3 - 2\sqrt{2}$, което означава, че търсеното най-голямо число е $R = \frac{2\sqrt{2} - 1}{2}$.

Забележка: В решението напълно съзнателно е избягнато използването на производни.