



СУ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“ – ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА
„ТУРНИР ПРОФ. БОРИСЛАВ БОЯНОВ“

17 февруари 2013 г.

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ И ИНСТРУКЦИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ

Пълното решение на всяка задача се оценява с 5 точки.

Задача 1. В триъгълника ABC са дадени $AC = 3$, $BC = 7$, и $\angle CAB = 120^\circ$. Да се намери AB .

Решение: От косинусовата теорема за $\triangle ABC$: $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot BC \cos \angle CAB$ получаваме квадратното уравнение за $c = AB$: $c^2 + 3c - 40 = 0$, чиито корени са $c_1 = -8$ и $c_2 = 5$. Отхвърляме отрицателния корен, и намираме окончателно $AB = 5$.

За получаване на квадратното уравнение $c^2 + 3c - 40 = 0$ 3 т.;

За решаване на това уравнение 1 т.;

За получаване на окончателния отговор $AB = 5$ 1 т.

Задача 2. Четирицифрено число е съставено от цифрите 0, 1, 2 и 3. Да се намерят всички такива числа, които се делят на 11.

Решение: Ще предположим, че в записа на четирицифреното число участват всичките цифри 0, 1, 2 и 3. От $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d = 11(91a + 9b + c) + b + d - a - c$ следва, че четирицифреното число $\overline{abcd}$ се дели на 11 точно когато $b + d - a - c$ се дели на 11. Понеже $|b + d - a - c| \leq 2 + 3 - 1 - 0 = 4$, последното е изпълнено при $b + d - a - c = 0$, или $b + d = a + c$. Освен това, $a \neq 0$, за да бъде числото $\overline{abcd}$ четирицифрено. Така намираме всички числа, отговарящи на условието на задачата: 1023, 1320, 2013, 2310, 3102 и 3201.

За намиране на k числа ($1 \leq k \leq 6$) удовлетворяващи условието на задачата $k-1$ т.;

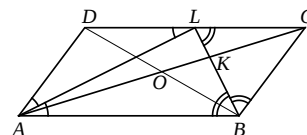
Забележка: В случай, че задачата е решавана при предположение, че някоя от цифрите може да не участва в записа на числото, точки не се отнемат.

Задача 3. Ъглополовящите на $\angle DAB$ и $\angle ABC$ в успоредника $ABCD$ се пресичат в точка L , лежаща върху CD . Ако K е пресечната точка на AC и BL , да се намери $\frac{BK}{KL}$.

Решение: От $\angle DAL = \angle LAB$ (по условие) и $\angle DLA = \angle LAB$ (като кръстни ъгли) следва, че $\triangle DAL$ е равнобедрен и $AD = DL$. Аналогични разсъждения показват, че $\triangle CBL$ е равнобедрен и $BC = CL$. Получим, че $CL = DL = AD = BC$ и L е среда на CD . Ако O е пресечната точка на диагоналите на успоредника $ABCD$, имаме $BO = OD$, и следователно точката K се явява медицентър в $\triangle BCD$. Тогава $BK : KL = 2 : 1$.

За доказване, че L е среда на AB 3 т.;

За намиране на $BK : KL = 2 : 1$ 2 т.



Задача 4. Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които уравнението

$$4^x - a \cdot 2^x + 1 = 0$$

има два реални корена, единият от които е отрицателен, а другият е положителен.

Решение: Полагаме $t = 2^x$ и получаваме уравнението

$$f(t) = t^2 - at + 1 = 0.$$

От свойствата на показателната функция знаем, че $x < 0 \Leftrightarrow t = 2^x \in (0, 1)$ и $x > 0 \Leftrightarrow t = 2^x > 1$. Следователно трябва да намерим тези a , за които квадратното уравнение $f(t) = 0$ има два реални корена, единият от които е в интервала $(0, 1)$, а другият е по-голям от 1. Това условие е изпълнено точно когато са изпълнени неравенствата $f(1) < 0$ (което обезпечава и реалност на корените на $f(t)$) и $f(0) > 0$. Неравенството $f(1) = 2 - a < 0$ дава $a > 2$, а неравенството $f(0) = 1 > 0$ е изпълнено винаги. Окончателно, търсените стойности на параметъра a са $a > 2$.

За полагане $t = 2^x$ и получаване на квадратно уравнение $f(t) = 0$ 1 т.;

За съобразяване, че корените на $f(t) = 0$ са разположени по един в интервалите $(0, 1)$ и $(1, \infty)$ 2 т.;

За съобразяване, че горното условие е еквивалентно със системата неравенства $f(1) < 0$, $f(0) > 0$ 1 т.;

За решаване на неравенствата $f(1) < 0$ и $f(0) > 0$ и получаване на окончателния отговор $a > 2$ 1 т.

Задача 5. Да се реши неравенството

$$\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} \leq \frac{3}{2}.$$

Решение: Неравенството има смисъл при $x \neq -2$, $x \neq 1$ и $\frac{x+2}{x-1} \geq 0$, откъдето допустимите стойности на x са $x \in (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$. Полагаме $t = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$, ($t > 0$) и получаваме еквивалентното неравенство $2t^2 - 3t - 2 \leq 0$, с решение $-\frac{1}{2} \leq t \leq 2$. Тъй като $t > 0$, трябва да решим само неравенството $t \leq 2$, което е еквивалентно

с $t^2 \leq 4$, или $\frac{x+2}{x-1} \leq 4$. Решението на това неравенство е $x \in (-\infty, 1) \cup [2, \infty)$. Отчитайки допустимите стойности за x , окончателно за решението на даденото неравенство получаваме $x \in (-\infty, -2) \cup [2, \infty)$.

За определяне на допустимите стойности на променливата, $x \in (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$ 1 т.;

За полагане $t = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$ или $t = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$ и получаване на квадратно неравенство за t 1 т.;

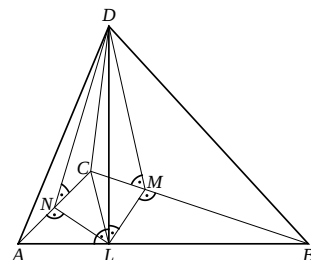
За решаване на квадратното неравенство и получаване $t \in [-\frac{1}{2}, 2]$ 1 т.;

За намиране на $x \in (-\infty, 1) \cup [2, \infty)$ 1 т.;

За получаване на окончателния отговор $x \in (-\infty, -2) \cup [2, \infty)$ 1 т.

Задача 6. В триъгълна пирамида $ABCD$ основните ръбове са $AB = 7$, $BC = 8$ и $AC = 5$, а околните стени ABD , BCD и ACD сключват с основата ъгли съответно 90° , 60° и 60° . Да се намери обемът на пирамидата.

Решение: Нека L е ортогоналната проекция на D върху основата ABC . По условие $ABD \perp ABC$, следователно $L \in AB$. Нека $LM \perp BC$ и $LN \perp AC$ ($M \in BC$, $N \in AC$). От теоремата за трите перпендикуляра следва $DM \perp BC$ и $DN \perp AC$. Така ъглите, които околните стени BCD и ACD сключват с равнината на основата, са съответно $\angle DML = 60^\circ$ и $\angle DNL = 60^\circ$. От еднаквостта на правоъгълните триъгълници DLM и DLN следва $LM = LN$, следователно L е петата на ъглополовящата на $\angle ACB$. В $\triangle ABC$ последователно пресмятаме:



$$\cos \angle ACB = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle ACB = 60^\circ \Rightarrow \angle MCL = \angle NCL = 30^\circ;$$

$$CL = \frac{40\sqrt{3}}{13} \text{ (напр. по формулата } CL = \frac{2AC \cdot BC \cdot \cos 30^\circ}{AC + BC} \text{)}; LM = \frac{1}{2}CL = \frac{20\sqrt{3}}{13} \text{ (от правоъгълния } \triangle CML \text{)}.$$

Накрая от правоъгълния $\triangle DLM$ намираме височината на пирамидата $DL = LM \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{60}{13}$. За обема на пирамидата $ABCD$ получаваме

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot DL = \frac{1}{6} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin 60^\circ \cdot DL = \frac{200\sqrt{3}}{13}.$$

За пресмятане на $S_{ABC} = 10\sqrt{3}$ (например по Хероновата формула) 1 т.;

За обосновка, че ортогоналната проекция L на върха D върху равнината на основата лежи върху страната AB и е пета на ъглополовящата на $\angle ACB$ 1 т.;

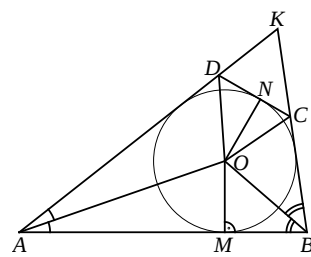
За намиране на двустенните ъгли $\angle DML = 60^\circ$ и $\angle DNL = 60^\circ$ и пресмятане на $LM = \frac{20\sqrt{3}}{13}$ 2 т.

За намиране на височината на пирамидата $DL = \frac{60}{13}$ и на обема ѝ $V = \frac{200\sqrt{3}}{13}$ 1 т.

Задача 7. Окръжност k с радиус $r = \sqrt{3}$ се допира до раменете на ъгъл с връх K и големина 60° . Четириъгълник $ABCD$ е описан около k , така че A и D са върху едното рамо на ъгъла (D е между A и K), а B и C са върху другото рамо на ъгъла (C е между B и K). Да се намерят дължините на AB и CD , за които лицето на $ABCD$ е възможно най-малко.

Решение: Тъй като $AB + CD = AD + BC$, от $S_{ABCD} = p \cdot r = (AB + CD)\sqrt{3}$ заключаваме, че S_{ABCD} ще бъде възможно най-малко точно когато $AB + CD$ е възможно най-малко. Понеже страните AB и CD са независими една от друга, S_{ABCD} ще бъде най-малко точно когато всяка от отсечките AB и CD е с минимална възможна дължина.

Да означим $\alpha = \angle DAB$ и $\gamma = \angle BCD$. Изпълнено е $0 < \alpha < 120^\circ$ (като ъгъл в $\triangle ABK$, в който $\angle AKB = 60^\circ$) и $60^\circ < \gamma < 180^\circ$ (защото $\gamma = \angle KDC + \angle DKC$ като допълнителен на ъгъла при върха C в $\triangle DCK$). Тогава $\angle ABC = 120^\circ - \alpha$ и $\angle CDA = 240^\circ - \gamma$. Нека O е центърът на окръжността вписана в $ABCD$, а M и N са допирните ѝ точки съответно с AB и CD . От правоъгълните триъгълници AMO и BMO имаме $AM = \sqrt{3} \cotg \frac{\alpha}{2}$ и $BM = \sqrt{3} \cotg(60^\circ - \frac{\alpha}{2})$, откъдето за $AB = AM + BM$ намираме



$$AB = \sqrt{3} \left(\cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg(60^\circ - \frac{\alpha}{2}) \right) = \sqrt{3} \frac{\sin(\frac{\alpha}{2} + 60^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin(60^\circ - \frac{\alpha}{2})} = \sqrt{3} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}(\cos(\alpha - 60^\circ) - \cos 60^\circ)} = \frac{3}{\cos(\alpha - 60^\circ) - \frac{1}{2}}.$$

Знаменателят на дробта $\frac{3}{\cos(\alpha - 60^\circ) - \frac{1}{2}}$ е положителен; освен от геометрични съображения ($AB > 0$),

това следва и от неравенствата $-60^\circ < \alpha - 60^\circ < 60^\circ \Rightarrow \cos(\alpha - 60^\circ) > \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. Затова тази дроб ще е най-малка когато знаменателят ѝ $\cos(\alpha - 60^\circ) - \frac{1}{2}$ е най-голям. Това е така при $\cos(\alpha - 60^\circ) = 1$, или за $\alpha = 60^\circ$, и тогава $AB = 6$. Следователно най-малката възможна дължина на AB е $AB = 6$.

Аналогично изразяваме CN и DN от правоъгълните триъгълници CON и DON и получаваме

$$CD = \sqrt{3} \left(\cotg \frac{\gamma}{2} + \cotg(120^\circ - \frac{\gamma}{2}) \right) = \sqrt{3} \frac{\sin(\frac{\gamma}{2} + 120^\circ - \frac{\gamma}{2})}{\sin \frac{\gamma}{2} \sin(120^\circ - \frac{\gamma}{2})} = \sqrt{3} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}(\cos(\gamma - 120^\circ) - \cos 120^\circ)} = \frac{3}{\cos(\gamma - 120^\circ) + \frac{1}{2}}.$$

Знаменателят на дробта $\frac{3}{\cos(\gamma - 120^\circ) + \frac{1}{2}}$ е положителен, както лесно се вижда и от $-60^\circ < \gamma - 120^\circ < 60^\circ$,

затова тази дроб ще е най-малка когато знаменателят ѝ е възможно най-голям. Последното е изпълнено при $\cos(\gamma - 120^\circ) = 1$, или за $\gamma = 120^\circ$, в който случай $CD = 2$. Следователно най-малката възможна дължина на CD е $CD = 2$. Четириъгълникът $ABCD$, отговарящ на условието на задачата и имащ най-малкото възможно лице, е равнобедрен трапец ($AD = BC = 4$) и $S_{ABCD} = 8\sqrt{3}$.

За съобразяване, че S_{ABCD} е най-малко точно когато всяка от страните AB и CD е с минимална възможна дължина.....1т.;

За изразяване на AB като функции на една променлива, например $AB = f(\alpha)$, $0 < \alpha < 120^\circ$1т.;

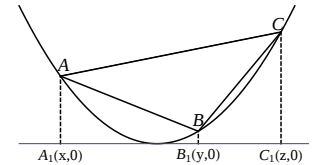
За изразяване на CD като функции на една променлива, например $CD = g(\gamma)$, $60^\circ < \gamma < 180^\circ$1т.;

За намиране на най-малката възможна стойност на AB , $AB = 6$ 1т.;

За намиране на най-малката възможна стойност на CD , $CD = 2$ 1т.

Задача 8. Точките A , B и C лежат върху графиката на функцията $y = x^2$ и абсцисите им са в интервала $[-1, 1]$. Да се докаже, че лицето на триъгълника ABC не надминава 1.

Решение: Нека точките са с координати $A(x, x^2)$, $B(y, y^2)$ и $C(z, z^2)$. Без ограничение можем да считаме, че $-1 \leq x < y < z \leq 1$. Нека точките $A_1(x, 0)$, $B_1(y, 0)$ и $C_1(z, 0)$ са ортогоналните проекции съответно на A , B и C върху абсцисната ос. За лицето S на триъгълника ABC имаме



$$\begin{aligned} S &= S_{AA_1C_1C} - S_{AA_1B_1B} - S_{BB_1C_1C} = \frac{AA_1 + CC_1}{2} \cdot A_1C_1 - \frac{AA_1 + BB_1}{2} \cdot A_1B_1 - \frac{BB_1 + CC_1}{2} \cdot B_1C_1 \\ &= \frac{x^2 + z^2}{2}(z - x) - \frac{x^2 + y^2}{2}(y - x) - \frac{y^2 + z^2}{2}(z - y) = \frac{1}{2}[x^2(z - y) + y^2(x - z) + z^2(y - x)]. \end{aligned}$$

Оценяваме отгоре всяко от трите събираеми в последия израз както следва:

$$1) \ x^2 \leq 1, \ z - y > 0 \Rightarrow x^2(z - y) \leq z - y;$$

$$2) \ y^2 \geq 0, \ x - z < 0 \Rightarrow y^2(x - z) \leq 0;$$

$$3) \ z^2 \leq 1, \ y - x > 0 \Rightarrow z^2(y - x) \leq y - x.$$

Следователно $S = \frac{1}{2}[x^2(z - y) + y^2(x - z) + z^2(y - x)] \leq \frac{1}{2}[z - y + 0 + y - x] = \frac{1}{2}(z - x) \leq 1$. Равенството $S = 1$ е изпълнено точно когато едновременно са изпълнени условията $x^2 = 1$, $y = 0$, $z^2 = 1$ и $z - x = 2$, т.е., при $(x, y, z) = (-1, 0, 1)$, или за триъгълника ABC с върхове точките с координати $(-1, 1)$, $(0, 0)$ и $(1, 1)$.

За изразяване на S като функция $S = f(x, y, z)$ на абсцисите x , y и z на точките A , B и C 2 т.;

За доказване на неравенството $f(x, y, z) \leq 1$ 3 т.