СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА „ТУРНИР ПРОФ. БОРИСЛАВ БОЯНОВ“

ВТОРИ КРЪГ

17 март 2013 г.

Задача 1. Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е зададена с $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2+2}{a_n+1}, \quad n \geq 1.$

а) Да се докаже, че редицата е сходяща, и да се намери $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

б) Да се докаже, че за всяко $n \geq 2$ е изпълнено неравенството $|a_n - a| < \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$.

Задача 2. Даден е триъгълник ABC, като $AC > BC$. Вписаната в триъгълника окръжност пресича височината CH ($H \in AB$) в точките K и L, като K е между C и L. Да се намерят дължините на страните на триъгълника ABC, ако $CK = \sqrt{192} - \sqrt{143}$, $KL = 2\sqrt{143}$, и $LH = \sqrt{147} - \sqrt{143}$.

Задача 3. Коефициентите и корените на алгебричния полином $f(x)$ са реални числа. Да се докаже, че за всяко реално число x са изпълнени неравенствата:

а) $\big(f'(x)\big)^2 - f(x)f''(x) \geqq 0\,;$ б) $3\big(f''(x)\big)^2 - 4f'(x)f'''(x) + f(x)f^{(4)}(x) \geqq 0\,.$

Задача 4. Нека O е вътрешна точка за триъгълника ABC и ε е произволно положително число. Да се докаже, че съществуват естествени числа p, q и r, такива че дължината на вектора $p\,\overrightarrow{OA} + q\,\overrightarrow{OB} + r\,\overrightarrow{OC}$ е по-малка от ε.

Задача 5. Да се намерят всички естествени числа n, за които полиномът $f(x) = x^{2n} + x^n + 1$ е неразложим над $\mathbb{Z}$ (т.е. $f(x)$ не може да се представи като произведение на два неконстантни полинома с цели коефициенти).

Време за работа 5 часа.