



ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

Задача 1. Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е зададена с $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{a_n + 1}$, $n \geq 1$.

а) Да се докаже, че редицата е сходяща, и да се намери $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

б) Да се докаже, че за всяко $n \geq 2$ е изпълнено неравенството $|a_n - a| < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

Решение: а) Очевидно членовете на редицата са положителни числа. С индукция се показва, че $a_n < 2$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Наистина, това е вярно за $n = 1$, и ако е изпълнено за някое $n \in \mathbb{N}$, тогава

$$a_{n+1} - 2 = \frac{a_n^2 + 2}{a_n + 1} - 2 = \frac{a_n(a_n - 2)}{a_n + 1} < 0.$$

Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена отгоре от 2, а тя е и монотонно растяща, както лесно се вижда от

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2 - a_n}{a_n + 1} > 0.$$

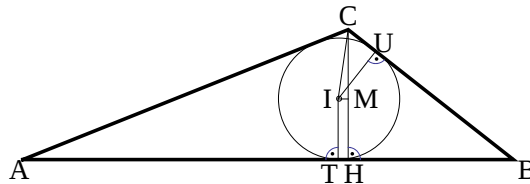
Затова редицата е сходяща, и за границата ѝ a с граничен преход получаваме $a = \frac{a^2 + 2}{a + 1} \Rightarrow a = 2$.

б). От доказаното в подточка а) следва, че $|a_n - a| = 2 - a_n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Тогава при $n \geq 2$

$$2 - a_n = 2 - \frac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-1} + 1} = \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 1} (2 - a_{n-1}) < \frac{2}{3} (2 - a_{n-1}) < \left(\frac{2}{3}\right)^2 (2 - a_{n-2}) < \dots < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} (2 - a_1) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

Задача 2. Даден е триъгълник ABC , като $AC > BC$.

Вписаната в триъгълника окръжност пресича височината CH ($H \in AB$) в точките K и L , като K е между C и L . Да се намерят дължините на страните на триъгълника ABC , ако $CK = \sqrt{192} - \sqrt{143}$, $KL = 2\sqrt{143}$, и $LH = \sqrt{147} - \sqrt{143}$.



Решение: Използваме стандартните означения за елементите на триъгълник ABC : a, b, c са дължините на страните му, I и r са центърът и радиусът на вписаната в триъгълника окръжност, и $\gamma = \angle ACB$. Нека още U и T са допирните точки на окръжността съответно до страните BC и AB , а M е петата на перпендикуляра, спуснат от I към CH . За дължината на височината CH имаме $CH = CK + KL + LH = \sqrt{192} + \sqrt{147} = 8\sqrt{3} + 7\sqrt{3} = 15\sqrt{3}$.

От свойството на секуща и допирателна към окръжност през една и съща точка (в случая точката C) имаме $CU^2 = (p - c)^2 = CK \cdot CL = CK \cdot (CK + KL) = (\sqrt{192} - \sqrt{143})(\sqrt{192} + \sqrt{143}) = 7^2$, следователно $p - c = 7$ и $\boxed{(1) \ a + b - c = 14}$. От същото свойство за секуща и допирателна получаваме $HT^2 = HL \cdot HK = (\sqrt{147} - \sqrt{143})(\sqrt{147} + \sqrt{143}) = 4$, т.е., $HT = 2$. От правоъгълника $THMI$ намираме $IM = 2$. Понеже $\triangle KIL$ е равнобедрен, IM е височина и медиана в него, следователно $KM = KL/2 = \sqrt{143}$. От правоъгълния $\triangle KIM$ намираме $IK = \sqrt{IM^2 + KM^2} = 7\sqrt{3} \Rightarrow r = 7\sqrt{3}$. От правоъгълния $\triangle CIU$ получаваме $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{IU}{CU} = \frac{r}{p - c} = \sqrt{3}$, откъдето $\frac{\gamma}{2} = 60^\circ$ и $\gamma = 120^\circ$. От косинусовата теорема за $\triangle ABC$ получаваме връзката $\boxed{(2) \ a^2 + b^2 + ab = c^2}$, а от $2S_{ABC} = ab \sin \gamma = c \cdot CH$ изразяваме $\boxed{(3) \ ab = 30c}$. Решавайки системата уравнения (1), (2) и (3) и отчитайки $b > a$, намираме $a = 42, b = 70, c = 98$.

Задача 3. Коефициентите и корените на алгебричния полином $f(x)$ са реални числа. Да се докаже, че за всяко реално число x са изпълнени неравенствата:

$$\text{а) } (f'(x))^2 - f(x)f''(x) \geq 0; \quad \text{б) } 3(f''(x))^2 - 4f'(x)f'''(x) + f(x)f^{(4)}(x) \geq 0.$$

Решение: а) Неравенството $[f'(x)]^2 - f(x)f''(x) \geq 0$ е очевидно вярно когато f е полином от степен ≤ 1 . Нека неравенството е вярно за всички полиноми от степен, ненадминаваща n , с реални коефициенти и корени. Всеки полином f от разглеждания клас от степен $n+1$ може да се представи във вида $f(x) = (x-a)g(x)$, където $a \in \mathbb{R}$ и $g(x)$ е полином от разглеждания клас от степен n . От $f'(x) = g(x) + (x-a)g'(x)$ и $f''(x) = 2g'(x) + (x-a)g''(x)$ получаваме

$$\begin{aligned} (f'(x))^2 - f(x)f''(x) &= (g(x) + (x-a)g'(x))^2 - (x-a)g(x)(2g'(x) + (x-a)g''(x)) \\ &= (x-a)^2([g'(x)]^2 - g(x)g''(x)) + g^2(x) \geq 0, \end{aligned}$$

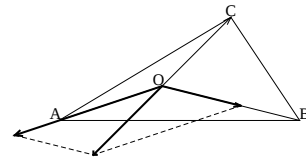
съгласно индукционното предположение. С това прехода от n към $n+1$ е направен, и неравенството е доказано за полиноми от произволна степен от разглеждания клас.

б) Неравенството $3(f''(x))^2 - 4f'(x)f'''(x) + f(x)f^{(4)}(x) \geq 0$ е очевидно вярно за всички полиноми от степен, ненадминаваща 2. Допускаме, че е вярно за полиноми от разглеждания клас от степен, ненадминаваща n . Прехода от n към $n+1$ извършваме както в подточка а). Към представянията на $f'(x)$ и $f''(x)$ добавяме $f'''(x) = (x-a)g'''(x) + 3g''(x)$, $f^{(4)}(x) = (x-a)g^{(4)}(x) + 4g'''(x)$, и замествайки, получаваме

$$\begin{aligned} 3(f''(x))^2 - 4f'(x)f'''(x) + f(x)f^{(4)}(x) &= 3(2g'(x) + (x-a)g''(x))^2 - 4(g(x) + (x-a)g'(x))((x-a)g'''(x) + 3g''(x)) \\ &\quad + (x-a)g(x)((x-a)g^{(4)}(x) + 4g'''(x)) \\ &= (x-a)^2(3(g''(x))^2 - 4g'(x)g'''(x) + g(x)g^{(4)}(x)) + 12((g'(x))^2 - g(x)g''(x)). \end{aligned}$$

Първото събираемо е неотрицателно поради индукционното предположение, а второто е неотрицателно съгласно подточка а). С това индукционната стъпка от n към $n+1$ е завършена, и неравенството е доказано за полиноми от разглеждания клас от произволна степен.

Задача 4. Нека O е вътрешна точка за триъгълника ABC и ε е произволно положително число. Да се докаже, че съществуват естествени числа p, q и r , такива че дължината на вектора $p\vec{OA} + q\vec{OB} + r\vec{OC}$ е по-малка от ε .



Решение: Съществуват положителни числа α и β , такива че $\alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$ (виж чертежа), и тогава за всяко $n \in \mathbb{N}$, $n\alpha\vec{OA} + n\beta\vec{OB} + n\vec{OC} = \vec{0}$. Ако $[s]$ и $\{s\}$ са съответно цялата и дробната част на реалното число s , имаме $[n\alpha]\vec{OA} + \{n\alpha\}\vec{OA} + [n\beta]\vec{OB} + \{n\beta\}\vec{OB} + n\vec{OC} = \vec{0}$. Да означим

$$\vec{a}_n = \{n\alpha\}\vec{OA} + \{n\beta\}\vec{OB} = -([n\alpha]\vec{OA} + [n\beta]\vec{OB} + n\vec{OC}).$$

Нека $k \in \mathbb{N}$ е такова, че успоредникът построен върху насочените отсечки $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$ се разделя на k^2 еднакви успоредника $\{\Pi_i\}_{i=1}^{k^2}$ със страни успоредни на $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$ и диагонали по-малки от ε . Ще казваме за краткост, че $\vec{a}_n$ принадлежи на Π_i , ако насочената отсечка-представител на вектора $\vec{a}_n$ с начало точката O има за край точка, принадлежаща на Π_i . Тъй като успоредниците Π_i са краен брой, съществува поне един, да го означим с Π , такъв че $\vec{a}_n$ принадлежи на Π за безброй много $n \in \mathbb{N}$. Да изберем естествените числа m и n така, че: $\vec{a}_m$ и $\vec{a}_n$ принадлежат на Π и $m - n > \max\{\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\}$. Тогава

$$\varepsilon > |\vec{a}_m - \vec{a}_n| = |([m\alpha] - [n\alpha])\vec{OA} + ([m\beta] - [n\beta])\vec{OB} + (m - n)\vec{OC}|$$

и $[m\alpha] > [n\alpha]$, $[m\beta] > [n\beta]$. Естествените числа $p = [m\alpha] - [n\alpha]$, $q = [m\beta] - [n\beta]$ и $r = m - n$ са решение на задачата.

Задача 5. Да се намерят всички естествени числа n , за които полиномът $f(x) = x^{2n} + x^n + 1$ е неразложим над $\mathbb{Z}$ (т.е. $f(x)$ не може да се представи като произведение на два неконстантни полинома с цели коефициенти).

Решение: Нека $n = 3^s m$, където $s \geq 0$, $m \geq 1$ и $3 \nmid m$. Нека $g(x) = x^{2 \cdot 3^s} + x^{3^s} + 1$. Имаме $x^{3^{s+1}} - 1 = (x^{3^s} - 1)(x^{2 \cdot 3^s} + x^{3^s} + 1) \equiv 0 \pmod{g(x)}$, т.е. $x^{3^{s+1}} \equiv 1 \pmod{g(x)}$. От тук във всеки от двата възможни случая $m = 3k + 1$ и $m = 3k + 2$ получаваме $f(x) \equiv 0 \pmod{g(x)}$, т.е. $g(x)$ дели $f(x)$. Действително, при $m = 3k + 1$ имаме

$$f(x) = x^{2 \cdot 3^s(3k+1)} + x^{3^s(3k+1)} + 1 = \left(x^{3^{s+1}}\right)^{2k} x^{2 \cdot 3^s} + \left(x^{3^{s+1}}\right)^k x^{3^s} + 1 \equiv x^{2 \cdot 3^s} + x^{3^s} + 1 \equiv 0 \pmod{g(x)}.$$

Подобна е проверката и в случая $m = 3k + 2$. Ако $m > 1$, то $\deg g(x) < \deg f(x)$ и следователно $f(x)$ е разложим над $\mathbb{Z}$.

Нека сега $m = 1$, т.е. $n = 3^s$. Имаме (за коефициентите по модул 3)

$$f(x) = x^{2 \cdot 3^s} + x^{3^s} + 1 \equiv (x^2 + x + 1)^{3^s} \equiv (x^2 - 2x + 1)^{3^s} \equiv (x - 1)^{2 \cdot 3^s} \pmod{3}.$$

От тук за полинома $h(x) = f(x + 1)$ получаваме $h(x) \equiv x^{2 \cdot 3^s} \pmod{3}$. Това означава, че всички коефициенти на $h(x)$ след старшия (който е равен на 1) се делят на 3, а освен това свободният му член $h(0) = f(1) = 3$ не се дели на 3^2 . Тогава $h(x)$ е неразложим над $\mathbb{Z}$ по известния критерий на Айзенщайн, а значи и $f(x)$ е неразложим. Окончателно, всичките търсени стойности на n са $n = 3^s$, $s \geq 0$.