



СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА

„ТУРНИР ПРОФ. БОРИСЛАВ БОЯНОВ“

19 февруари 2012 г.

Задача 1. Да се реши уравнението:

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+2} = 1.$$

Задача 2. В окръжност с радиус $R = \frac{25}{4}$ е вписан триъгълник ABC със страни $AC = BC = 10$. Да се намери дължината на страната AB .

Задача 3. Да се реши неравенството:

$$(7 - 4\sqrt{3})^x + 1 \leq 14(2 - \sqrt{3})^x.$$

Задача 4. Даден е успоредник $ABCD$. Точката M е върху страната AD , а точката N е върху страната BC , като $AM = CN$. Точката P е произволно избрана върху страната CD . Отсечката MN пресича отсечките AP и BP съответно в точките K и L . Да се докаже, че $S_{\Delta KLP} = S_{\Delta AKM} + S_{\Delta BNL}$.

Задача 5. Стените ABC и ACD на триъгълната пирамида $ABCD$ са равнобедрени правоъгълни триъгълници с хипотенуза $AC = \sqrt{2}$ и сключват помежду си ъгъл 60° . Да се намери обемът на пирамидата.

Задача 6. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a , за които неравенството

$$\sin^3 x + a \cos^2 x - 1 \leq 0$$

е изпълнено за всяко x .

Задача 7. В триъгълника ABC медианите AA_1 ($A_1 \in BC$) и BB_1 ($B_1 \in AC$) се пресичат в точка M . Около четириъгълника CB_1MA_1 може да се опише окръжност. Да се намери възможно най-голямата стойност на отношението на периметрите на този четириъгълник и триъгълника ABC .

Задача 8. Да се намери най-голямата възможна стойност на израза $a^2 + b^2 + c^2$, ако е известно, че $f(x) = ax^2 + bx + c$ изпълнява неравенството $|f(x)| \leq |x|$ за всяко x от интервала $[-1, 1]$.

Време за работа 4 часа.