



СУ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“ – ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА
„ТУРНИР ПРОФ. БОРИСЛАВ БОЯНОВ“

19 февруари 2012 г.

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ И ИНСТРУКЦИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ

Пълното решение на всяка задача се оценява с 5 точки.

Задача 1. Да се реши уравнението $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+2} = 1$.

Решение: След повдигане на квадрат от даденото уравнение получаваме $\sqrt{(3-x)(x+2)} = 2$ и (след още едно повдигане на квадрат) $x^2 - x - 2 = 0$. Корените на това уравнение са 2 и -1. Проверката показва, че само $x = -1$ е решение на даденото уравнение.

За достигане до $x^2 - x - 2 = 0$ 2 т.;
За решаване на това уравнение 1 т.;
За проверка и окончателен отговор 2 т.

Задача 2. В окръжност с радиус $R = \frac{25}{4}$ е вписан триъгълник ABC със страни $AC = BC = 10$. Да се намери дължината на страната AB .

Решение: При стандартните означения за $\triangle ABC$, от $S = \frac{c h_c}{2}$ и $S = \frac{a b c}{4R}$ получаваме $h_c = \frac{a b}{2R} = \frac{100}{\frac{25}{2}} = 8$.

Сега от питагоровата теорема намираме $\frac{c}{2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ или $c = 12$.

За намиране на h_c (или $\sin \alpha = \frac{4}{5}$) 3 т.;
За намиране на AB 2 т.

Задача 3. Да се реши неравенството $(7 - 4\sqrt{3})^x + 1 \leq 14(2 - \sqrt{3})^x$.

Решение: Неравенството има смисъл за всяко реално x . Полагаме $t = (2 - \sqrt{3})^x$. От $(2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3}$ получаваме $(7 - 4\sqrt{3})^x = t^2$ и неравенството за новата неизвестна t добива вида $t^2 - 14t + 1 \leq 0$, с решение $t \in [7 - 4\sqrt{3}, 7 + 4\sqrt{3}]$. За променливата x имаме $7 - 4\sqrt{3} \leq (2 - \sqrt{3})^x \leq 7 + 4\sqrt{3}$. Основата $2 - \sqrt{3}$ на степента е положителна и по-малка от 1, т.е. $(2 - \sqrt{3})^x$ е намаляваща функция на x . От $7 + 4\sqrt{3} = (7 - 4\sqrt{3})^{-1} = (2 - \sqrt{3})^{-2}$ окончателно получаваме $(2 - \sqrt{3})^2 \leq (2 - \sqrt{3})^x \leq (2 - \sqrt{3})^{-2}$, или $x \in [-2, 2]$.

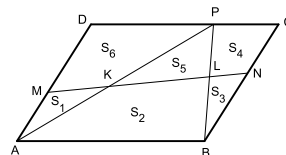
За полагане и получаване на неравенство за новата неизвестна 1 т.;
За решаване на неравенството 1 т.;
За получаване на неравенството за x 1 т.;
За решаване на неравенството за x (по една за всеки от двата края на интервала) 2 т.

Задача 4. Даден е успоредник $ABCD$. Точката M е върху страната AD , а точката N е върху страната BC , като $AM = CN$. Точката P е произволно избрана върху страната CD . Отсечката MN пресича отсечките AP и BP съответно в точките K и L . Да се докаже, че $S_{\triangle KLP} = S_{\triangle AKM} + S_{\triangle BNL}$.

Решение: Да означим $S_{ABCD} = S$, $S_{AKM} = S_1$, $S_{ABLK} = S_2$, $S_{BNL} = S_3$, $S_{NCPL} = S_4$, $S_{KLP} = S_5$ и $S_{MKPD} = S_6$. Понеже $AM = CN$, то $S_{ABNM} = S_{CDMN} = S/2$ (трапеци с еднаква сума на основите и обща височина). За лицето на $\triangle ABP$ имаме $S_{ABP} = S/2$. Така получаваме $S_1 + S_2 + S_3 = S_{ABNM} = S/2 = S_{ABP} = S_2 + S_5$ или $S_1 + S_3 = S_5$, което трябва да се докаже.

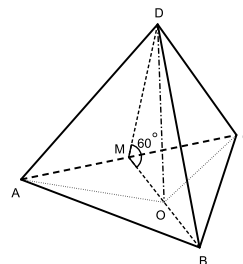
За пълно решение на задачата 5 т.
За частични резултати:

- решение на задачата в частен случай (при специфичен избор на M и/или P) 2 т.;
- за намиране на $S_{ABNM} = S_{CDMN} = S/2$ 2 т.;
- за съобразяване на $S_{ABP} = S/2$ 1 т.



Задача 5. Стените ACB и ACD на триъгълната пирамида $ABCD$ са равнобедрени правоъгълни триъгълници с хипотенуза $AC = \sqrt{2}$ и сключват помежду си ъгъл 60° . Да се намери обемът на пирамидата.

Решение: Понеже $\triangle ACB$ и $\triangle ACD$ са равнобедрени правоъгълни триъгълници с хипотенуза $AC = \sqrt{2}$, имаме $AB = BC = AD = CD = 1$, $DM \perp AC$, $BM \perp AC$ и $MB = MD = \frac{\sqrt{2}}{2}$, където M е средата на AC . Така ъгълът $\angle BMD$ е линеен на двустенния ъгъл между стените ACB и ACD , т.е. $\angle(ACB, ACD) = \angle BMD = 60^\circ$ и триъгълникът $\triangle BDM$ е равностранен (равнобедрен с ъгъл 60°). Нека точка D се проектира върху равнината ABC в точка O ($DO \perp (ABC)$). Тогава $\triangle AOD \cong \triangle COD$ и $AO = CO$, т.е. точката O лежи върху симетралата на AC или $O \in BM$. Така телесната височина DO лежи в равнината MBD и $DO \perp MB$, т.е. DO е височината на равностранния триъгълник $\triangle BDM$ или $DO = MB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$. Сега за



$$\text{обема получаваме } V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot DO = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot DO = \frac{\sqrt{6}}{24}.$$

- За намиране на линеен на двустенния ъгъл 1 т.;
 За установяване, че $\triangle BMD$ е равностранен 1 т.;
 За показване къде се проектира върхът D 1 т.;
 За получаване на DO 1 т.;
 За пресмятане на обема 1 т.

Задача 6. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a , за които неравенството $\sin^3 x + a \cos^2 x - 1 \leq 0$ е изпълнено за всяко x .

Решение: След заместването $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ лявата страна на неравенството става $\sin^3 x - a \sin^2 x + a - 1$, или, след разлагане, $(\sin x - 1)(\sin^2 x + (1 - a)\sin x + 1 - a)$. Полагаме $t = \sin x$, тогава $t \in [-1, 1]$, и даденото неравенство ще е изпълнено за всяко x тогава и само тогава когато неравенството $g(t) \geq 0$ е изпълнено за всяко $t \in [-1, 1]$, където $g(t) = t^2 + (1 - a)t + 1 - a$. *Случай 1:* ако $\frac{a-1}{2} \in (-1, 1)$, т.е., $a \in (-1, 3)$, тогава

$$\min_{t \in [-1, 1]} g(t) = g\left(\frac{a-1}{2}\right) = (1-a)(3+a)/4 \geq 0 \text{ при } a \in [-3, 1]. \text{ Предвид направеното предположение, решението}$$

$$\text{в този случай е } a \in (-1, 1]. \text{ Случай 2: ако } \frac{a-1}{2} \notin (-1, 1), \text{ т.е., } a \in (-\infty, -1] \cup [3, \infty), \text{ тогава } \min_{t \in [-1, 1]} g(t) =$$

$$\min\{g(-1), g(1)\} = \min\{1, 3 - 2a\} \geq 0 \text{ при } a \leq \frac{3}{2}, \text{ и поради направеното предположение, решението в този}$$

случай е $a \in (-\infty, -1]$. Окончателно, търсените стойности са $a \in (-\infty, 1]$.

За свеждане на задачата към квадратното неравенство $t^2 + (1 - a)t + 1 - a \geq 0$, $t \in [-1, 1]$ 2 т.;

За пълното изследване кога горното неравенство е изпълнено за всяко $t \in [-1, 1]$ 3 т.

При предложеното решение разпределението на тези 3 точки е:

– за пълното изследване на случая $-1 < (a-1)/2 < 1$ 1 т.;

– за пълното изследване на случая $(a-1)/2 \notin (-1, 1)$ 1 т.;

– за получаване на окончателния отговор $a \in (-\infty, 1]$ 1 т.

Задача 7. В триъгълника ABC медианите AA_1 ($A_1 \in BC$) и BB_1 ($B_1 \in AC$) се пресичат в точка M . Около четириъгълника CB_1MA_1 може да се опише окръжност. Да се намери възможно най-голямата стойност на отношението на периметрите на този четириъгълник и триъгълника ABC .

Решение: При стандартните означения за $\triangle ABC$ имаме $\angle B_1MA_1 = 180^\circ - \gamma$ и $\angle AMB_1 = \angle BMA_1 = \gamma$. Тогава $\triangle AB_1M \sim \triangle AA_1C$ и $\triangle BA_1M \sim \triangle BB_1C$, и $AM : AC = AB_1 : AA_1 = B_1M : A_1C$, т.е. $(2m_a/3) : b = (b/2) : m_a = (m_b/3) : (a/2)$, откъдето получаваме $m_a = b\sqrt{3}/2$ и $m_b = a\sqrt{3}/2$.

Сега $P_{CB_1MA_1} = b/2 + m_b/3 + m_a/3 + a/2 = (a+b)(3+\sqrt{3})/6$. Освен това от $m_a = \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}/2 = b\sqrt{3}/2$ получаваме $a^2 + b^2 = 2c^2$. От тук $c = \sqrt{(a^2 + b^2)/2}$, $P_{ABC} = a + b + \sqrt{(a^2 + b^2)/2}$ и $k = \frac{P_{CB_1MA_1}}{P_{ABC}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{6 \left(1 + \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{(a+b)\sqrt{2}}\right)}$.

За да оценим отношението k ще се възползваме от неравенството между средното квадратично и средното аритметично на две положителни числа: $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2}$, като равенство се достига точно когато $a = b$.

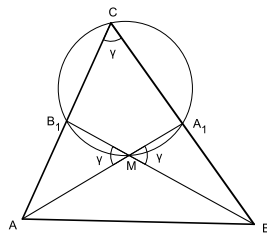
С негова помощ намираме $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{(a+b)\sqrt{2}} \geq \frac{1}{2}$ и $k \leq \frac{3 + \sqrt{3}}{6(1 + 1/2)} = \frac{3 + \sqrt{3}}{9}$. Така търсената най-голяма стойност е

$$k = \frac{3 + \sqrt{3}}{9}, \text{ тя се достига точно когато триъгълникът } ABC \text{ е равностранен } (a = b \text{ и } c = \sqrt{(a^2 + b^2)/2}).$$

За изразяване на $P_{CB_1MA_1}$ чрез a и b 2 т.;

За изразяване на P_{ABC} чрез a и b 1 т.;

За намиране на най-голямата стойност на k 2 т.



Задача 8. Да се намери най-голямата възможна стойност на израза $a^2 + b^2 + c^2$, ако е известно, че $f(x) = ax^2 + bx + c$ изпълнява неравенството $|f(x)| \leq |x|$ за всяко x от интервала $[-1, 1]$.

Решение: При $x = 0$ имаме $0 \leq |f(0)| \leq 0$, откъдето следва $f(0) = c = 0$ и $f(x) = ax^2 + bx$. Сега от $|f(x)| = |ax + b| \cdot |x| \leq |x|$ за всяко $x \in [-1, 1]$ получаваме последователно $|x|(|ax + b| - 1) \leq 0$ и $|ax + b| \leq 1$ за всяко $x \in [-1, 1]$. Функцията $g(x) = |ax + b|$ достига най-голямата си стойност в $[-1, 1]$ в някоя от точките ± 1 , затова неравенството $|ax + b| \leq 1$ е изпълнено за всяко $x \in [-1, 1]$ точно когато то е изпълнено за $x = \pm 1$, т.е., $|-a + b| \leq 1$ и $|a + b| \leq 1$. От тези неравенства получаваме $a^2 + b^2 = [(-a + b)^2 + (a + b)^2]/2 \leq (1 + 1)/2 = 1$. Окончателно намираме $a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 \leq 1$. Равенството се достига когато $|-a + b| = 1$ и $|a + b| = 1$, т.е., при $(a, b) = (\pm 1, 0)$ и при $(a, b) = (0, \pm 1)$, или за $f(x) = \pm x^2$ и $f(x) = \pm x$.

За получаване на $c = 0$ 1 т.;

За получаване на условието $|ax + b| \leq 1$, $x \in [-1, 1]$ 1 т.;

За свеждане на това условие към системата неравенства $|-a + b| \leq 1$, $|a + b| \leq 1$ 1 т.;

За извеждане на неравенството $a^2 + b^2 \leq 1$ от горната система 2 т.