



СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА
„ТУРНИР ПРОФ. БОРИСЛАВ БОЯНОВ“

ВТОРИ КРЪГ

18 март 2012 г.

Задача 1. Дадена е аритметична прогресия с първи член $a_1 = 27$, която съдържа като членове числата 36 и 48. Ако a_{2012} е цяло число, да се намерят всичките му възможни стойности.

Задача 2. Точката M е вътрешна за отсечката AB , като $AM = 2r_1$ и $MB = 2r_2$. В една полуравнина относно правата AB са построени полуокръжностите c_1 , c_2 и c_3 с диаметри съответно AM , MB и AB . Окръжността s се допира външно до c_1 и c_2 и вътрешно до c_3 . Да се намери радиуса r на окръжността s .

Задача 3. Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е зададена посредством $a_1 = 0$ и $a_{n+1} = \sqrt{12 - a_n}$ за всяко естествено число n . Да се докаже, че редицата е сходяща, и да се намери границата ѝ.

Задача 4. Нека p е просто число. Ако $2^{\frac{p-1}{4}} - 1$ е цяло число, което се дели на p , да се докаже, че:

- а) $p - 1$ се дели на 8;
- б) съществуват цели числа a и b , за които $a^4 + 1$ и $b^4 + 2$ се делят на p .

Задача 5. Нека $f(x) = (\cos x)^{2n-1} \sin x - (\sin x)^{2n-1} \cos x$, където $n \geq 3$ е естествено число. Да се докажат неравенствата

$$\frac{1}{\sqrt{2n-1}} \left(1 - \frac{1}{(2n-1)^{n-1}} \right) \left(\frac{2n-1}{2n} \right)^n < \max_{x \in [0, \frac{\pi}{4}]} f(x) < \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \left(\frac{2n-1}{2n} \right)^n.$$

Време за работа 5 часа.