

СУ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“ – ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА
„ТУРНИР ПРОФ. БОРИСЛАВ БОЯНОВ“



ВТОРИ КРЪГ

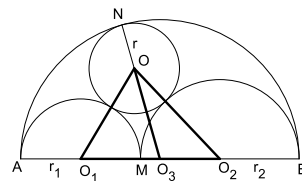
18 март 2012 г.

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

Задача 1. Дадена е аритметична прогресия с първи член $a_1 = 27$, която съдържа като членове числата 36 и 48. Ако a_{2012} е цяло число, да се намерят всичките му възможни стойности.

Решение: Нека аритметичната прогресия има разлика d , а числата 36 и 48 са съответно $(k+1)$ -вият и $(l+1)$ -вият ѝ членове, т.е. $a_{k+1} = 36 = 27 + k \cdot d$ и $a_{l+1} = 48 = 27 + l \cdot d$. Така последователно получаваме $k \cdot d = 9$, $l \cdot d = 21$; $d = \frac{9}{k} = \frac{21}{l}$; $\frac{k}{3} = \frac{l}{7} = p \in \mathbb{N}$ или $k = 3p$, $l = 7p$ и $d = \frac{9}{k} = \frac{3}{p}$. Сега за цялото число a_{2012} имаме $a_{2012} = a_1 + 2011 \cdot d = 27 + 2011 \cdot \frac{3}{p}$, следователно p е делител на $3 \cdot 2011$, т.е. е някое от числата $\{1, 3, 2011, 6033\}$. Така при $p = 1$ имаме $a_{2012} = 27 + 6033 = 6060$, при $p = 3$ – $a_{2012} = 27 + 2011 = 2038$, при $p = 2011$ – $a_{2012} = 27 + 3 = 30$ и при $p = 6033$ – $a_{2012} = 27 + 1 = 28$, т.е. окончателно получихме, че a_{2012} е някое от числата $\{6060, 2038, 30, 28\}$.

Задача 2. Точката M е вътрешна за отсечката AB , като $AM = 2r_1$ и $MB = 2r_2$. В една полуравнина относно правата AB са построени полуокръжностите c_1 , c_2 и c_3 с диаметри съответно AM , MB и AB . Окръжността s се допира външно до c_1 и c_2 и вътрешно до c_3 . Да се намери радиуса r на окръжността s .



Решение: Нека O_1 , O_2 , O_3 и O са центровете съответно на c_1 , c_2 , c_3 и s . Допирната точка N на c_3 и s е пресечната точка на правата O_3O с c_3 . Тогава $O_3N = AB/2 = r_1 + r_2$ и $OO_3 = r_1 + r_2 - r$. В триъгълника O_1O_2O имаме $O_1O = r_1 + r$, $O_2O = r_2 + r$, $O_1O_2 = r_1 + r_2$. Освен това $O_1O_3 = r_2$ и $O_3O_2 = r_1$. Изразяваме OO_3 с формулата на Стюарт $OO_3^2 = OO_1^2 \cdot \frac{O_3O_2}{O_1O_2} + OO_2^2 \cdot \frac{O_1O_3}{O_1O_2} - O_1O_2^2 \cdot \frac{O_3O_2}{O_1O_2} \cdot \frac{O_1O_3}{O_1O_2}$, която след заместване ни дава уравнение за r

$$(r_1 + r_2 - r)^2 = (r_1 + r)^2 \cdot \frac{r_1}{r_1 + r_2} + (r_2 + r)^2 \cdot \frac{r_2}{r_1 + r_2} - (r_1 + r_2)^2 \cdot \frac{r_1}{r_1 + r_2} \cdot \frac{r_2}{r_1 + r_2}.$$

Решението на това уравнение е $r = \frac{r_1 r_2 (r_1 + r_2)}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}$.

Задача 3. Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е зададена посредством $a_1 = 0$ и $a_{n+1} = \sqrt{12 - a_n}$ за всяко естествено число n . Да се докаже, че редицата е сходяща, и да се намери границата ѝ.

Решение: Очевидно $a_n \geq 0$ и $a_n \leq a_2 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ за всяко n . От $a_1 < 3$, $a_2 > 3$ и наблюдението: $x < 3 \Rightarrow \sqrt{12 - x} > 3$; $2\sqrt{3} \geq x > 3 \Rightarrow \sqrt{12 - x} < 3$ заключаваме, че $a_{2n-1} < 3$ и $a_{2n} > 3$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. От рекурентната връзка намираме $a_n = 12 - a_{n+1}^2$ и

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_n &= \sqrt{12 - a_{n+1}} + a_{n+1}^2 - 12 = (a_{n+1} - 3)(a_{n+1} + 3) + \sqrt{12 - a_{n+1}} - 3 \\ &= (a_{n+1} - 3)(a_{n+1} + 3) + \frac{3 - a_{n+1}}{3 + \sqrt{12 - a_{n+1}}} = (a_{n+1} - 3) \left(a_{n+1} + 3 - \frac{1}{3 + \sqrt{12 - a_{n+1}}} \right). \end{aligned}$$

От тук и от $a_{n+1} + 3 - \frac{1}{3 + \sqrt{12 - a_{n+1}}} > a_{n+1} \geq 0$ следва, че $a_{n+2} > a_n$, ако $a_{n+1} > 3$, и $a_{n+2} < a_n$, ако $a_{n+1} < 3$. Понеже $a_{2n-1} < 3$ и $a_{2n} > 3$ за всяко n , получаваме, че редицата $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно растяща и ограничена отгоре от 3, а редицата $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно намаляваща и ограничена отдолу

от 3. Следователно двете редици са сходящи, и нека $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = b$, $0 < a \leq 3 \leq b$. С извършване на граничен преход $n \rightarrow \infty$ и n четно, респ. нечетно, в равенството $a_{n+1} = \sqrt{12 - a_n}$, получаваме $a = \sqrt{12 - b}$ и $b = \sqrt{12 - a}$. След повдигане на квадрат на тези равенства и почленно изваждане получаваме $(b - a)(a + b - 1) = 0$, и тъй като $a + b - 1 > 0$, следва, че $b = a$. Следователно редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща с граница a . От равенството $a = \sqrt{12 - a}$ намираме $a = 3$.

Задача 4. Нека p е просто число. Ако $2^{\frac{p-1}{4}} - 1$ е цяло число, което се дели на p , да се докаже, че:

а) $p - 1$ се дели на 8;

б) съществуват цели числа a и b , за които $a^4 + 1$ и $b^4 + 2$ се делят на p .

Решение: От условието е ясно, че $p = 4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, и тогава $2^k \equiv 1 \pmod{p}$.

а) Съществува число $u \in \mathbb{Z}$, за което $u^2 \equiv -1 \pmod{p}$ (например $u = (2k)!$, както лесно следва от теоремата на Уилсън). Тогава за $v = u + 1$ имаме $v^2 = u^2 + 1 + 2u \equiv 2u \pmod{p}$ и $v^4 \equiv 4u^2 \equiv -4 \pmod{p}$. Сега от теоремата на Ферма и условието $2^k \equiv 1 \pmod{p}$ получаваме $1 \equiv v^{p-1} = v^{4k} \equiv (-4)^k = (-1)^k (2^k)^2 \equiv (-1)^k \pmod{p}$. Това означава, че $2|k$, т.е. $k = 2\ell$ ($\ell \in \mathbb{N}$), и тогава $p - 1 = 8\ell$ се дели на 8.

Ще отбележим, че твърдението в подточка а) може да се докаже и като се използват квадратични остатъци.

б) Известно е, че съществува примитивен корен g по модул p (т.е. $g \in \mathbb{Z}$, такова че $g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, но $g^i \not\equiv 1 \pmod{p}$ при $0 < i < p - 1$). Ясно е, че $g^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$. Сега за числото $a = g^\ell$ имаме $a^4 = g^{4\ell} = g^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$, т.е. p дели $a^4 + 1$.

Тъй като числата $g, g^2, \dots, g^{p-1}$ образуват пълна система от ненулеви остатъци по модул p , има число $m \in \mathbb{N}$, такова че $-2 \equiv g^m \pmod{p}$. Имаме $g^{2\ell m} \equiv (-2)^{2\ell} = 2^{2\ell} \equiv 1 \pmod{p}$ и следователно $p - 1$ дели $2\ell m = \frac{m(p-1)}{4}$. Това означава, че $4|m$, т.е. $m = 4n$ ($n \in \mathbb{N}$). Сега за числото $b = g^n$ получаваме $b^4 = g^{4n} = g^m \equiv -2 \pmod{p}$, т.е. p дели $b^4 + 2$.

Задача 5. Нека $f(x) = (\cos x)^{2n-1} \sin x - (\sin x)^{2n-1} \cos x$, където $n \geq 3$ е естествено число. Да се докажат неравенствата

$$\frac{1}{\sqrt{2n-1}} \left(1 - \frac{1}{(2n-1)^{n-1}} \right) \left(\frac{2n-1}{2n} \right)^n < \max_{x \in [0, \frac{\pi}{4}]} f(x) < \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \left(\frac{2n-1}{2n} \right)^n.$$

Решение: Нека $t = \operatorname{tg}^2 x$, тогава $t \in [0, 1]$ при $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, и от $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ следва

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^n} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \left(\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \right)^n = \frac{\sqrt{t}(1 - t^{n-1})}{(1 + t)^n} =: g(t) \leq \frac{\sqrt{t}}{(1 + t)^n} =: h(t),$$

затова $\max_{t \in [0, 1]} g(t) = \max_{x \in [0, \frac{\pi}{4}]} f(x) < \max_{t \in [0, 1]} h(t)$. От $h'(t) = \frac{1 - (2n-1)t}{2\sqrt{t}(1+t)^{n+1}}$ следва $\max_{t \in [0, 1]} h(t) = h(t_1)$, където $t_1 = \frac{1}{2n-1}$. Сега оценката отгоре се получава от

$$\max_{x \in [0, \frac{\pi}{4}]} f(x) < \max_{t \in [0, 1]} h(t) = h(t_1) = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \left(\frac{2n-1}{2n} \right)^n.$$

Оценката отдолу следва от

$$\max_{x \in [0, \frac{\pi}{4}]} f(x) = \max_{t \in [0, 1]} g(t) \geq g(t_1) = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \left(1 - \frac{1}{(2n-1)^{n-1}} \right) \left(\frac{2n-1}{2n} \right)^n.$$

Неравенството е строго, защото t_1 не е точка на максимум за $g(t)$ в $(0, 1)$. Това се съобразява лесно от

$$g'(t) = \frac{t^n - (2n-1)t^{n-1} - (2n-1)t + 1}{2\sqrt{t}(1+t)^{n+1}} =: \frac{\varphi(t)}{2\sqrt{t}(1+t)^{n+1}}.$$

Тъй като $\varphi(t_1) = \frac{1 - (2n-1)^2}{(2n-1)^n} < 0$, изпълнено е $g'(t_1) < 0$.