СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Писмен конкурсен изпит по Математика I

2 април 2017 г.

Тема №2.

ОТГОВОРИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

- **Максималният брой точки** от трите части на изпита е **100**
- Правилно отбелязаният отговор на всяка задача от 1. до 20. се оценява както следва:

задачи от 1. до 10. – 2 точки **задачи от 11. до 20. – 3 точки**

1.	А	Б	~~В~~	Г	11.	А	Б	В	~~Г~~
2.	А	Б	В	~~Г~~	12.	А	Б	В	~~Г~~
3.	~~А~~	Б	В	Г	13.	А	~~Б~~	В	Г
4.	А	~~Б~~	В	Г	14.	А	Б	~~В~~	Г
5.	~~А~~	Б	В	Г	15.	А	Б	В	~~Г~~
6.	А	Б	~~В~~	Г	16.	~~А~~	Б	В	Г
7.	~~А~~	Б	В	Г	17.	А	Б	~~В~~	Г
8.	А	~~Б~~	В	Г	18.	А	Б	В	~~Г~~
9.	~~А~~	Б	В	Г	19.	А	~~Б~~	В	Г
10.	А	~~Б~~	В	Г	20.	А	Б	~~В~~	Г

- Правилно попълненият отговор на **всяка задача от 21. до 25.** се оценява с **4 точки**

21.	$4\dfrac{11}{12}$
22.	$x = 5$
23.	Банка А; 5,22 лв.
24.	1164 лв.
25.	$AB = 4\sqrt[4]{2}$, $BC = 9\sqrt[4]{2}$, $AC = 11\sqrt[4]{2}$

• **Пълното решение на всяка задача от 26. до 28. се оценява с 10 точки.**

Задача 26. Да се реши системата $\left| \begin{array}{l} 4x^2+5xy-2y^2=1 \\ x^2-4xy+y^2=-2 \end{array} \right.$.

Решение: Да забележим, че системата няма решения от вида $(0;y)$ или $(x;0)$. Затова разсъжденията нататък са за $x \neq 0$ и $y \neq 0$.

Прибавяме първото уравнение, умножено с 2, към второто уравнение на системата и достигаме до хомогенното уравнение $9x^2+6xy-3y^2=0$, откъдето след разделяне на $3x^2$ получаваме $3+2\dfrac{y}{x}-\dfrac{y^2}{x^2}=0$.

Въвеждаме ново неизвестно $t=\dfrac{y}{x}$ и достигаме до $t^2-2t-3=0$.

Корените на последното уравнение са $t_1=3$ и $t_2=-1$.

1) При $t_1=3$ имаме $y=3x$ и след заместване в първото уравнение на системата x трябва да удовлетворява уравнението $4x^2+15x^2-18x^2=1$, т.е. $x^2=1$. Оттук намираме $x_1=1$ и $x_2=-1$ и решения на системата в този случай са $(x_1;y_1)=(1;3)$ и $(x_2;y_2)=(-1;-3)$.

2) При $t_1=-1$ имаме $y=-x$ и заместване в първото уравнение на системата води до $4x^2-5x^2-2x^2=1$, т.е. $-3x^2=1$. Последното уравнение няма реални корени, следователно и системата в този случай няма решение.

Окончателно, решенията на дадената система са $(x_1;y_1)=(1;3)$ и $(x_2;y_2)=(-1;-3)$.

Задача 27. Да се намери броят на четирицифрените числа, делящи се на 6 и с неповтарящи се цифри измежду $\{1,2,3,4,5,6\}$.

Решение I: За да се дели едно число A на 6, трябва A да се дели на 3 и да бъде четно. Разглеждаме отделно случаите, в които числото A е четно.

1) Последната цифра на A е 2. От признака за делимост на 3, ако a,b,c са другите 3 цифри на A, тогава трябва сборът от цифрите $a+b+c+2$ да се дели на 3. Тъй като $10=1+2+3+4 \leq a+b+c+2 \leq 2+4+5+6=17$, възможностите са:

$$\{a,b,c\}=\{1,3,6\}, \qquad \{a,b,c\}=\{1,4,5\}, \qquad \{a,b,c\}=\{3,4,6\}.$$

С всяка възможна тройка цифри, можем да образуваме $3!=6$ различни четирицифрени числа с неповтарящи се цифри, завършващи на 2. Следователно, в този случай имаме $n_1=3\,.\,3!=18$ четирицифрени числа, делящи се на 6 и с неповтарящи се цифри.

2) Ако последната цифра на A е 4 и a,b,c са другите 3 цифри на A, тогава трябва сборът от цифрите $a+b+c+4$ да се дели на 3. Тъй като $10=1+2+3+4 \leq a+b+c+4 \leq 3+4+5+6=18$, възможностите са: $\{a,b,c\}=\{1,2,5\}, \qquad \{a,b,c\}=\{2,3,6\}, \qquad \{a,b,c\}=\{3,5,6\}$.

С всяка възможна тройка цифри, можем да образуваме $3!=6$ различни четирицифрени числа с неповтарящи се цифри, завършващи на 4. Следователно, и в този случай имаме $n_2=3\,.\,3!=18$ четирицифрени числа, делящи се на 6 и с неповтарящи се цифри.

3) В случай, че последната цифра на A е 6 и a,b,c са другите 3 цифри на A, тогава трябва $a+b+c+6$ да се дели на 3, или което е същото $a+b+c$ да се дели на 3. Тъй като $6=1+2+3 \leq a+b+c \leq 3+4+5=12$, възможностите са:
$\{a,b,c\}=\{1,2,3\}, \qquad \{a,b,c\}=\{1,3,5\}, \qquad \{a,b,c\}=\{2,3,4\}, \qquad \{a,b,c\}=\{3,4,5\}$.

С всяка възможна тройка цифри, можем да образуваме $3!=6$ различни четирицифрени числа с неповтарящи се цифри, завършващи на 6. Следователно, имаме $n_3=4\,.\,3!=24$ четирицифрени числа, делящи се на 6 и с неповтарящи се цифри.

Така общият брой на четирицифрените числа, делящи се на 6 и с неповтарящи се цифри измежду $\{1,2,3,4,5,6\}$ е равен на $n_1+n_2+n_3=18+18+24=60$.

Решение II: Едно число се дели на 6, точно когато е четно и се дели на 3, т.е. когато завършва на четна цифра и сумата от цифрите му се дели на 3.

Понеже $1+2+3+4+5+6=21=3\cdot 7$, то четирицифрено число с неповтарящи се цифри измежду $\{1,2,3,4,5,6\}$ ще се дели на 3, точно когато сумата на двете останали цифри, които не участват в записа на числото, също се дели на 3.

Всички двойки цифри, които могат да се съставят от цифрите $\{1,2,3,4,5,6\}$ са: $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{1,5\}$, $\{1,6\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{2,5\}$, $\{2,6\}$,$\{3,4\}$, $\{3,5\}$, $\{3,6\}$, $\{4,5\}$, $\{4,6\}$ и $\{5,6\}$ ($C_6^4=C_6^2=15$ на брой).

От тях само двойките $\{1,2\}$, $\{1,5\}$, $\{2,4\}$, $\{3,6\}$ и $\{4,5\}$ имат сума деляща се на 3, т.е. търсените числа се записват с цифрите $\{3,4,5,6\}$, $\{2,3,4,6\}$, $\{1,3,5,6\}$, $\{1,2,4,5\}$ или $\{1,2,3,6\}$ и завършват на четна цифра.

От цифрите $\{3,4,5,6\}$ могат да се съставят четни числа, завършващи на 4 или 6. При фиксирана последна цифра броят на четирицифрените числа, завършващи на нея е $P_3 = 3! = 6$, т.е. от тази група могат да се образуват $2\cdot 3! = 12$ числа.

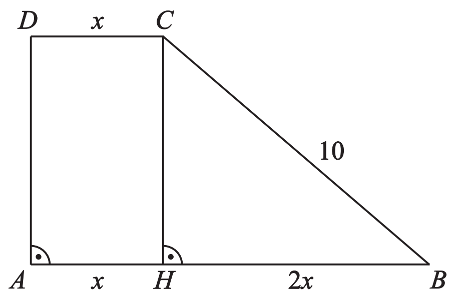
Аналогично, от всяка от групите $\{2,3,4,6\}$, $\{1,3,5,6\}$, $\{1,2,4,5\}$ и $\{1,2,3,6\}$ могат да се образуват съответно по $3\cdot 3! = 18$, $3! = 6$, $2\cdot 3! = 12$ и $2\cdot 3! = 12$ числа.

Така окончателно получаваме, че броят на четирицифрените числа, делящи се на 6 и с неповтарящи се цифри измежду $\{1,2,3,4,5,6\}$ е равен на $(2+3+1+2+2)\cdot 3! = 60$.

Задача 28. Измежду трапеците $ABCD$, за които $AB\|CD$, $\sphericalangle BAD = 90^\circ$, $BC = 10$, $AB = 3CD$ и имащи лице $S = 48$, да се намерят страните на този, който има най-голям периметър.

Решение: Нека $ABCD$ е трапец, удовлетворяващ условието на задачата. Трапецът е с прав ъгъл при бедрото AD, следователно AD е височина на трапеца.

Означаваме дължината на основата $CD = x$, оттук $AB = 3x$. Нека CH е височината на трапеца през върха C, като $H\in AB$. Тогава $AHCD$ е правоъгълник, като $AH = x$ и $CH = AD$. При това $BH = AB - AH = 2x$.



От правоъгълния $\triangle BCH$ и Питагоровата теорема получаваме:

$$CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{100-4x^2}.$$

Лицето на трапеца $ABCD$ е $S = 48$, а от друга страна, $S = \dfrac{AB+CD}{2}CH$.

Следователно, $\dfrac{3x+x}{2}\sqrt{100-4x^2} = 48$, откъдето $x\sqrt{100-4x^2} = 24, \qquad 0 \leqq x \leqq 5.$

Повдигаме на втора степен двете страни на последното уравнение и получаваме биквадратното уравнение $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$. Тъй като $x^4 - 25x^2 + 144 = (x^2-16)(x^2-9)$, положителните корени на биквадратното уравнение са $x_1 = 4$ и $x_2 = 3$.

Следователно има два трапеца с лице $S = 48$, удовлетваряващи условията $AB\|CD$, $\sphericalangle BAD = 90^\circ$, $BC = 10$ и $AB = 3CD$.

1) При $x_1 = 4$ имаме $AB = 12$, $CD = 4$ и $AD = HC = \sqrt{100-64} = 6$. В този случай периметърът на трапеца $ABCD$ е равен на $P_1 = 12+10+4+6 = 32$.

2) При $x_2 = 3$ намираме $AB = 9$, $CD = 3$ и $AD = HC = \sqrt{100-36} = 8$. При това периметърът на трапеца $ABCD$ е равен на $P_2 = 9+10+3+8 = 30$.

От неравенството $P_1 > P_2$ заключаваме, че търсеният трапец има дължини на страните $AB = 12$, $BC = 10$, $CD = 4$ и $AD = 6$.