Софийски Университет „Св. Климент Охридски“
Писмен конкурсен изпит по математика
7 май 2006 г.

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ – ТЕМА 2

Задача 1. Да се реши уравнението $\log_3 x^3 + 6\log_9 (x-2) = 3$.

Решение. Даденото уравнение има смисъл при $x > 2$. То е еквивалентно с $3\log_3 x + 6.\frac{1}{2}\log_3 (x-2) = 3$, $\log_3 x(x-2) = 1$, $x^2 - 2x - 3 = 0$. Оттук получаваме $x = -1 < 2$ и $x = 3 > 2$. Единственото решение е $x = 3$.

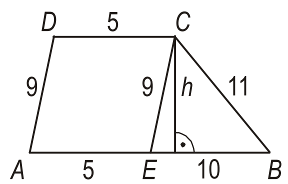
Задача 2. Да се реши уравнението $\cos x - \cos 3x = 6\sin^2 x$.

Решение. Преобразуваме даденото уравнение: $2\sin 2x \sin x = 6\sin^2 x$, $4\sin^2 x \cos x = 6\sin^2 x$, $\sin^2 x(2\cos x - 3) = 0$, $\sin x = 0$ или $2\cos x - 3 = 0$. От $\sin x = 0$ получаваме $x = k\pi$. Уравнението $2\cos x - 3 = 0$, т.е. $\cos x = \frac{3}{2}$ няма решение, понеже $\frac{3}{2} \notin [-1;1]$. Така решенията са $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. Дадена е аритметична прогресия $a_1, a_2, \dots, a_n$, за която $a_3 = 8$, $a_5 = 14$ и $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 100$. Да се намери *n*.

Решение. Нека *d* е разликата на прогресията. От $a_3 = a_1 + 2d = 8$ и $a_5 = a_1 + 4d = 14$ намираме $d = 3$ и $a_1 = 2$. Сега от формулата $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \left(= S_n\right) = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2}n$ получаваме $\dfrac{4 + 3(n-1)}{2}n = 100$ или $3n^2 + n - 200 = 0$. Корените на това уравнение са $n_1 = 8$ и $n_2 = -\frac{25}{3}$. Тъй като $n \in \mathbb{N}$, то $n = 8$.

Задача 4. Да се пресметне лицето на трапец *ABCD* с основи *AB* = 15, *CD* = 5 и бедра *AD* = 9, *BC* = 11.



Решение. Нека $CE \parallel DA$ ($E \in AB$). Тогава $CE = DA = 9$, $AE = CD = 5$ и $BE = AB - AE = 10$. По хероновата формула пресмятаме $S_{BCE} = 30\sqrt{2}$. След това за височината *h* на трапеца от $S_{BCE} = \frac{10h}{2} = 30\sqrt{2}$ получаваме $h = 6\sqrt{2}$. Лицето на трапеца е $S = \frac{AB+CD}{2}h = 60\sqrt{2}$.

Задача 5. Даден е триъгълник *ABC* със страни *AC* = 5, *BC* = 7 и радиус на описаната окръжност $R = \frac{7}{\sqrt{3}}$. Да се намери дължината на страната *AB*.

Решение. Да означим $AB = c$ и $\sphericalangle BAC = \alpha$. От синусовата теорема имаме $\sin\alpha = \frac{BC}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Следователно $\alpha = 60^\circ$ или $\alpha = 120^\circ$. Нека $\alpha = 60^\circ$. От косинусовата теорема получаваме $7^2 = 5^2 + c^2 - 2.5.c.\frac{1}{2}$ или $c^2 - 5c - 24 = 0$. Оттук намираме $c = 8$. Нека $\alpha = 120^\circ$. Отново от косинусовата теорема получаваме $7^2 = 5^2 + c^2 - 2.5.c.\left(-\frac{1}{2}\right)$ или $c^2 + 5c - 24 = 0$. Оттук намираме $c = 3$. Окончателно, $AB = 8$ или $AB = 3$.

Задача 6. Да се реши неравенството $2^{2x+1} - 6^x - 9^x < 0$.

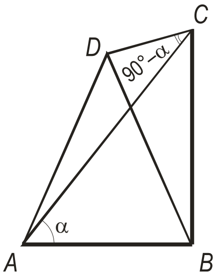
Решение. Записваме даденото неравенство във вида $2.\left(2^x\right)^2 - 2^x.3^x - \left(3^x\right)^2 < 0$. Разделяме двете му страни на $\left(3^x\right)^2 > 0$ и получаваме еквивалентното неравенство $2\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^x - 1 < 0$. Полагаме $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$ и достигаме до $2t^2 - t - 1 < 0$. Решенията на това неравенство са $t \in \left(-\frac{1}{2};1\right)$. Така $-\frac{1}{2} < \left(\frac{2}{3}\right)^x < 1$. Неравенството $\left(\frac{2}{3}\right)^x > -\frac{1}{2}$ е изпълнено за всяко *x* (понеже $\left(\frac{2}{3}\right)^x > 0\ \forall x$), а неравенството $\left(\frac{2}{3}\right)^x < 1$ е равносилно с $x > 0$ (понеже $\frac{2}{3} < 1$). Следователно решенията са $x \in (0;+\infty)$.

Задача 7. Да се намерят стойностите на реалния параметър *a*, за които уравнението $x^3 - ax^2 + ax - 1 = 0$ има единствен реален корен.

Решение. Имаме $x^3 - ax^2 + ax - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) - ax(x-1) = (x-1)\left(x^2 + (1-a)x + 1\right) = 0$. Числото 1 е корен на даденото уравнение за всяка стойност на параметъра *a*. Следователно уравнението има единствен реален корен ($x = 1$) тогава и само тогава, когато квадратното уравнение (*) $x^2 + (1-a)x + 1 = 0$ няма реални корени, различни от 1. Това е изпълнено точно когато корените x_1, x_2 на (*) или не са реални, или $x_1 = x_2 = 1$. Корените x_1, x_2 не са реални при $D=(1-a)^2-4<0 \Leftrightarrow (a+1)(a-3)<0 \Leftrightarrow a\in(-1;3)$; значи тези стойности на a са решение на задачата. Понататък, числото 1 е корен на (*) когато $1+1-a+1=0$, т.е. $a=3$. При $a=3$ (*) става $x^2-2x+1=(x-1)^2=0$ и $x_1=x_2=1$; значи $a=3$ също е решение на задачата. Окончателно, търсените стойности на параметъра са $a\in(-1;3]$.

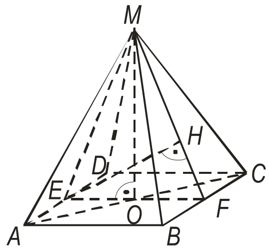
Задача 8. Разглеждаме изпъкнали четириъгълници *ABCD*, за които $AB=\sqrt{3}$, $CD=1$, $AC=2\sqrt{3}$ и $\sphericalangle BAC+\sphericalangle ACD=90^\circ$. Измежду всички такива четириъгълници да се намерят дължините на *AD*, *BC* и *BD* на този, който има най-голямо лице.

Решение. Да означим $\sphericalangle BAC=\alpha$, тогава $\sphericalangle ACD=90^\circ-\alpha$ и $\alpha\in(0^\circ;90^\circ)$. За лицето *S* на четириъгълника имаме $S=S_{ABC}+S_{ACD}=\frac{\sqrt{3}.2\sqrt{3}.\sin\alpha}{2}+\frac{1.2\sqrt{3}.\sin(90^\circ-\alpha)}{2}=3\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha$. Представяме *S* във вида $S=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha\right)=2\sqrt{3}\sin(\alpha+30^\circ)$. Сега е ясно, че лицето *S* е най-голямо при $\sin(\alpha+30^\circ)=1$, което е изпълнено единствено при $\alpha=60^\circ$. Така $\sphericalangle BAC=60^\circ$ и $\sphericalangle ACD=30^\circ$. От косинусовата теорема за ΔABC и ΔACD получаваме $BC=3$ и $AD=\sqrt{7}$. В ΔABC от $AB^2+BC^2=12=AC^2$ следва, че $\sphericalangle ABC=90^\circ$ и тогава от $AB=\frac{1}{2}AC$ следва, че $\sphericalangle ACB=30^\circ$. Следователно $\sphericalangle BCD=60^\circ$ и от ΔBCD намираме $BD=\sqrt{7}$.



Задача 9. В правилна четириъгълна пирамида *ABCDM* (с основа *ABCD* и връх *M*) разстоянието между правите *AD* и *BM* е равно на $\sqrt{2}$, а ъгълът между правата *AC* и равнината *BCM* е равен на 30°. Да се намери обемът на пирамидата.

Решение. Да означим с *a* и *h* съответно основния ръб и височината на пирамидата. Равнината *BCM* съдържа правата *BM* и е успоредна на правата *AD* (понеже *AD*||*BC*). Тогава разстоянието $\sqrt{2}$ между кръстосаните прави *AD* и *BM* е равно на разстоянието между *AD* и *BCM* или все едно на разстоянието от коя да е точка на правата *AD* до равнината *BCM*.



Нека A' е ортогоналната проекция на *A* върху *BCM;* съгласно казаното по-горе $AA'=\sqrt{2}$. Ортогоналната проекция на правата *AC* върху равнината *BCM* е правата $A'C$ и значи ъгълът между *AC* и *BCM* е равен на ъгъла между *AC* и $A'C$, т.е. $\sphericalangle ACA'=30^\circ$. От правоъгълния $\Delta ACA'$ получаваме $AC=2\sqrt{2}$ и, тъй като $AC=a\sqrt{2}$, намираме $a=2$.

Нека *E* и *F* са средите съответно на *AD* и *BC* и *O* е средата на *EF*. Нека $EH\perp FM$ ($H\in FM$). Понеже $BC\perp EFM$, то $EH\perp BC$ и значи $EH\perp BCM$. Тогава разстоянието от *E* до равнината *BCM* е равно на дължината на отсечката *EH* и от казаното в началото следва $EH=\sqrt{2}$. От правоъгълния ΔEHF ($EF=a=2$) получаваме $\sphericalangle EFM=45^\circ$ и тогава от ΔMOF намираме $h=MO=OF=1$. (Тъй като $\sphericalangle FEM=\sphericalangle EFM=\sphericalangle FEH$, точката *H* съвпада с *M*.)

Накрая пресмятаме обема на пирамидата $V=\frac{1}{3}S_{ABCD}.MO=\frac{1}{3}a^2h=\frac{4}{3}$.

Задача 10. Да се докаже, че графиките на функциите $f(x)=x^2+x+1$ и $g(x)=\frac{1}{x}$ имат единствена обща точка и разстоянието от тази точка до началото на координатната система е по-малко от 2.

Решение. Абсцисите на общите точки на графиките на *f*(*x*) и *g*(*x*) са реалните корени на уравнението $x^2+x+1=\frac{1}{x}$ или $h(x)=x^3+x^2+x-1=0$. Тъй като $h'(x)=3x^2+2x+1>0$ за всяко *x*, функцията *h*(*x*) е растяща в интервала $(-\infty;+\infty)$. Освен това $h(0)=-1<0$ и $h(1)=2>0$. От казаното и теоремата на Болцано следва, че уравнението $h(x)=0$ има единствен реален корен α и $\alpha\in(0;1)$. Така графиките на *f*(*x*) и *g*(*x*) имат единствена обща точка *M* с координати $M\left(\alpha;\frac{1}{\alpha}\right)$.

За разстоянието от *M* до началото *O* на координатната система имаме $MO^2=\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=\frac{\alpha^4+1}{\alpha^2}$. От $h(\alpha)=0$ получаваме $\alpha^3=-\alpha^2-\alpha+1$ и $\alpha^4=-\alpha^3-\alpha^2+\alpha=2\alpha-1$. Тогава $MO^2=\frac{(2\alpha-1)+1}{\alpha^2}=\frac{2}{\alpha}$. Сега неравенството $MO<2$ или $MO^2<4$ е равносилно с $\frac{2}{\alpha}<4$, т.е. $\alpha>\frac{1}{2}$. Пресмятаме $h\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}$. Тъй като $h\left(\frac{1}{2}\right)<0$, т.е. $h\left(\frac{1}{2}\right)<h(\alpha)$ и *h*(*x*) е растяща функция, то $\frac{1}{2}<\alpha$. С други думи действително $\alpha>\frac{1}{2}$, което доказва, че $MO<2$.

Всяка задача се оценява с 4 точки. Оценката се получава по формулата 2 + 0,1.N, където N е броят на получените точки.