Софийски Университет „Св. Климент Охридски“
Писмен конкурсен изпит по математика
18 юли 2006 г.

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ – ТЕМА 3

Задача 1. Да се реши уравнението $\frac{x-5}{x-2}-\frac{x-6}{5-x}=\frac{x^2-6x+2}{x^2-7x+10}$.

Решение. При $x\neq 2$ и $x\neq 5$ уравнението е еквивалентно на $x^2-12x+35=0$, което има корени $x_1=5$ и $x_2=7$. Даденото уравнение има единствено решение $x=7$.

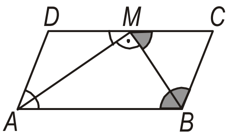
Задача 2. Да се реши уравнението $\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3}=1$.

Решение. При $x\geq\frac{2}{3}$ имаме $\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3}=1\Leftrightarrow\sqrt{3x-2}=1+\sqrt{x+3}\Leftrightarrow x-3=\sqrt{x+3}$. Ако $x\geq 3$, то $x-3=\sqrt{x+3}\Leftrightarrow x^2-7x+6=0$. Корените на квадратното уравнение са $x_1=1$ и $x_2=6$. $x_1=1$ не е решение на даденото уравнение, понеже не удовлетворява неравенството $x\geq 3$. Единственото решение на ирационалното уравнение е $x=6$.

Задача 3. Даден е правоъгълен триъгълник с периметър, равен на 24 и радиус на вписаната окръжност $r=2$. Да се намерят дължините на страните на триъгълника.

Решение. От $r=p-c$ намираме хипотенузата $c=10$. От $2r=a+b-c$ получаваме $a+b=14$, а от питагоровата теорема: $a^2+b^2=100$. Решенията на системата са $(6;8)$ и $(8;6)$. Следователно катетите на триъгълника са 6 и 8.

Задача 4. В успоредник *ABCD* ъглополовящите на $\sphericalangle BAD$ и $\sphericalangle ABC$ се пресичат в точка *M*, лежаща на страната *CD*. Да се намерят дължините на страните и лицето на успоредника, ако $AM=2\sqrt{5}$ и $BM=4$.

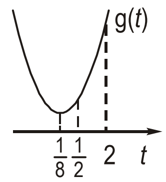


Решение. От $\sphericalangle BAD+\sphericalangle ABC=180^\circ\Rightarrow\sphericalangle BAM+\sphericalangle ABM=90^\circ\Rightarrow\sphericalangle AMB=90^\circ$. От питагоровата теорема $AB=\sqrt{AM^2+BM^2}=\sqrt{36}=6$. От $\sphericalangle BAM=\sphericalangle AMD\ (AB\parallel CD)$ и $\sphericalangle BAM=\sphericalangle MAD$ следва $\sphericalangle MAD=\sphericalangle AMD$, откъдето $AD=DM$. Аналогично $BC=CM$. Така получаваме $DC=2AD$ и $AD=3$. $S_{ABCD}=2S_{AMB}=AM.BM=8\sqrt{5}$.

Задача 5. Да се реши неравенството $\log_{2x}\left(x^2-5x+6\right)<1$.

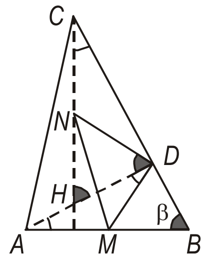
Решение. Дефиниционното множество на неравенството е $x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};2\right)\cup\left(3;+\infty\right)$. Когато $0<2x<1$, т.е. $x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$, $\log_{2x}\left(x^2-5x+6\right)<1\Leftrightarrow x^2-5x+6>2x\Leftrightarrow x^2-7x+6>0\Leftrightarrow x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$. Когато $2x>1$, т.е. $x\in\left(\frac{1}{2};2\right)\cup\left(3;+\infty\right)$, $\log_{2x}\left(x^2-5x+6\right)<1\Leftrightarrow x^2-5x+6<2x\Leftrightarrow x^2-7x+6<0\Leftrightarrow x\in(1;2)\cup(3;6)$. Следователно решенията на даденото неравенство са $x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup(1;2)\cup(3;6)$.

Задача 6. Да се намерят най-голямата и най-малката стойности на функцията $f(x)=4^{\sin x+1}-2^{\sin x}+1$.



Решение. Като положим $2^{\sin x}=t$, получаваме функцията $g(t)=4t^2-t+1$. Понеже $-1\leq\sin x\leq 1$, то $2^{-1}\leq 2^{\sin x}\leq 2^1$, т.е. $t\in\left[\frac{1}{2};2\right]$. Следователно търсим най-малката и най-голямата стойности на функцията $g(t)$ в интервала $\left[\frac{1}{2};2\right]$. Понеже върхът на параболата е в $t=\frac{1}{8}$, функцията $g(t)$ е монотонно растяща в интервала $\left[\frac{1}{2};2\right]$. Следователно $g_{\min}=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$ и $g_{\max}=g(2)=15$.

Задача 7. В остроъгълен триъгълник *ABC* точката *D* е петата на височината през върха *A*, *H* е ортоцентърът на триъгълника, а точките *M* и *N* са средите съответно на отсечките *AB* и *CH*. Да се намери лицето на триъгълника *MDN*, ако $AB=4$ и $\sphericalangle ACB=30^\circ$.



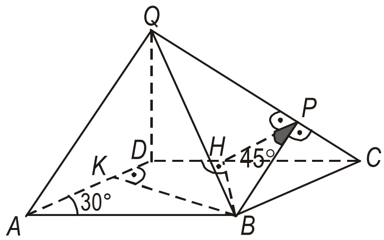
Решение. Нека $\sphericalangle ABC=\beta$, $\sphericalangle ACB=\gamma$. Понеже *DM* е медиана в правоъгълния $\triangle ABD$, $\sphericalangle MAD=\sphericalangle ADM=90^\circ-\beta$ и $DM=\frac{1}{2}AB=2$. Аналогично от правоъгълния $\triangle HDC$ имаме $\sphericalangle NDH=\sphericalangle NHD=\beta$ и $DN=\frac{1}{2}CH$. Така получаваме $\sphericalangle NDM=\sphericalangle NDH+\sphericalangle HDM=$ $=\beta+90^\circ-\beta=90^\circ$. От правоъгълните триъгълници *DCH* и *ACD* последователно получаваме

$DN=\frac{1}{2}CH=\frac{CD}{2\sin\beta}=\frac{AC\cos\gamma}{2\sin\beta}$. От синусовата теорема $\frac{AC}{\sin\beta}=\frac{AB}{\sin\gamma}$, откъдето $DN=\frac{1}{2}AB.\text{cotg}\gamma=\frac{1}{2}4.\text{cotg}30^\circ=2\sqrt{3}$. За лицето на ΔMDN получаваме $S_{MDN}=\frac{1}{2}DM.DN=\frac{1}{2}.2.2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

Задача 8. Да се намерят стойностите на реалния параметър *a*, при които уравнението $\left|\left|x^2-1\right|-2a\right|=a^2+1$ има точно три реални корена.

Решение. Очевидно, ако x_0 е корен, то и $-x_0$ е корен. Поради това броят на ненулевите корени е четно число. Следователно, за да има уравнението точно три корена, трябва $x=0$ да е корен. Като заместим с $x=0$, получаваме $\left|1-2a\right|=a^2+1$, откъдето намираме $a=0$ и $a=-2$. При $a=0$ се получава уравнението $\left|x^2-1\right|=1$, което има корени $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$ и $x_3=0$. При $a=-2$ имаме уравнението $\left|\left|x^2-1\right|+4\right|=5$, което отново има корени $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$ и $x_3=0$. Следователно търсените стойности на параметъра са $a=0$ и $a=-2$.

Задача 9. Основата на четириъгълна пирамида *ABCDQ* е ромб *ABCD* с $\sphericalangle BAD=30^\circ$, а околният ръб *DQ* е перпендикулярен на равнината на основата. Разстоянието между правите *BC* и *AQ* е равно на 1, а ъгълът между околните стени *BCQ* и *CDQ* е равен на 45°. Да се намери обемът на пирамидата.



Решение. Понеже $BC \parallel AD$, то $BC \parallel ADQ$ и разстоянието между правите *BC* и *AQ* е равно на разстоянието от точката *B* до равнината ADQ . Понеже $DQ \perp ABC$, то $ADQ \perp ABC$ и разстоянието от точката *B* до равнината ADQ е равно на височината *BK* $(K \in AD)$ в ромба. Нека $BH \perp DC$. Понеже $DCQ \perp ABC$, то $BH \perp DCQ$. Нека $HP \perp QC$. От теоремата за трите перпендикуляра следва, че и $BP \perp QC$ и $\sphericalangle BPH$ е линейният на двустенния ъгъл с ръб *CQ*. Имаме $BH=BK=1$, $AB=\frac{BK}{\sin 30^\circ}=2$ и $HC=BH.\text{cotg}30^\circ=1.\sqrt{3}=\sqrt{3}$. Тъй като $\sphericalangle BPH=45^\circ$, то $HP=BH=1$. Оттук $CP=\sqrt{2}$. От $\Delta CDQ \sim \Delta CPH$ получаваме $\frac{DQ}{HP}=\frac{DC}{CP}$ и оттук намираме $DQ=\sqrt{2}$. За обема *V* получаваме $V=\frac{1}{3}S_{ABCD}.DQ=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Задача 10. Дадено е уравнението $\left(1+x\right)^n=1+nx$, където *n* е цяло число, $n>1$. Да се намерят стойностите на *n*, за които всеки реален корен на уравнението е цяло число.

Решение. Записваме даденото уравнение във вида $\left(x+1\right)^n-nx-1=0$ и изследваме функцията $f\left(x\right)=\left(x+1\right)^n-nx-1$. Имаме $f'\left(x\right)=n\left(\left(x+1\right)^{n-1}-1\right)$.

Нека първо *n* е четно число. Тогава *n*–1 е нечетно, така че $f'\left(x\right)>0$ при $x+1>1$, т.е. $x>0$ и $f'\left(x\right)<0$ при $x+1<1$, т.е. $x<0$. Значи $f\left(x\right)$ намалява в $\left(-\infty;0\right)$ и расте в $\left(0;+\infty\right)$; при това $f\left(0\right)=0$. Следователно уравнението $f\left(x\right)=0$ има единствен реален корен $x=0$. Тъй като 0 е цяло число, условието е изпълнено.

Нека сега *n* е нечетно число. Тогава *n*–1 е четно, така че $f'\left(x\right)>0$ при $\left|x+1\right|>1$, т.е. $x<-2$ и $x>0$ и $f'\left(x\right)<0$ при $\left|x+1\right|<1$, т.е. $-2<x<0$. Значи $f\left(x\right)$ расте в $\left(-\infty;-2\right)$, намалява в $\left(-2;0\right)$ и расте в $\left(0;+\infty\right)$. Освен това $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=-\infty$, $f\left(-2\right)=2n-2>0$ и $f\left(0\right)=0$. От казаното и теоремата на Болцано следва, че уравнението $f\left(x\right)=0$ има точно два реални корена: $x=0$ и $x=\alpha$, където α е число от интервала $\left(-\infty;-2\right)$. Следователно условието е изпълнено точно когато α е цяло число.

Пресмятаме $f\left(-3\right)=-2^n+3n-1$. При $n=3$ получаваме $f\left(-3\right)=0$, което означава, че $\alpha=-3$ (цяло число) и условието е изпълнено. Нека $n>3$. С помощта на принципа на пълната математическа индукция лесно се доказва, че за всяко естествено число $n\geq 4$ е в сила $2^n>3n-1$ ($2^n>3n-1\Rightarrow 2^{n+1}>6n-2>3n+2=3\left(n+1\right)-1$). Това означава, че при $n>3$ е в сила $f\left(-3\right)<0$. Сега от $f\left(-3\right)<0$ и $f\left(-2\right)>0$ следва, че $\alpha\in\left(-3;-2\right)$. Тогава α не е цяло число и условието не е изпълнено.

Окончателно, търсените стойности са: всички четни естествени числа *n* и $n=3$.

Всяка задача се оценява с 4 точки. Оценката се получава по формулата 2 + 0,1.N, където N е броят на получените точки.