Софийски Университет "Св. Климент Охридски"
Писмен конкурсен изпит по математика, 20 май 2007г.

ТЕМА 2

Задача 1. Десетият и шестнадесетият член на аритметична прогресия са съответно равни на 14 и 26. Намерете третия член на прогресията.

Задача 2. Решете неравенството $3|x| \leq 2 + |x+1|$.

Задача 3. Намерете всички решения на уравнението $\sin x + \cos x = 1$, които са в интервала $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Задача 4. Лицето на околната повърхнина на правоъгълен паралелепипед е равно на 10, 16 или 18 в зависимост от това коя от стените му е избрана за основа. Намерете обема на паралелепипеда.

Задача 5. Точката M е във вътрешността или по контура на правоъгълник $ABCD$ със страни $AB = a$ и $BC = b$. Намерете възможно най-голямата стойност на сумата $MA + MC$.

Задача 6. Около равнобедрен правоъгълен триъгълник ABC с прав ъгъл при върха C е описана окръжност. Върху дъгата $\overset{\frown}{AB}$ от окръжността, която не съдържа точката C, е взета точка M. От точката C е спуснат перпендикуляр към правата AM, който пресича отсечката AM във вътрешна точка N. Докажете, че $MN = AN + MB$.

Задача 7. Две окръжности с радиуси 4 и 1 се допират външно в точка M, а общата им външна допирателна се допира до тях в точки A и B. Намерете лицето на триъгълника AMB.

Задача 8. В триъгълна пирамида $ABCD$ ръбовете AD, BD и CD имат равни дължини и са два по два взаимно перпендикулярни. Радиусът на описаната около пирамидата сфера е R. Намерете обема на пирамидата.

Задача 9. Група от n деца си разделили кутия бонбони. Първото дете взело 1 бонбон и още една десета от останалите в кутията бонбони. След него второто взело 2 бонбона и още една десета от останалите след това бонбони в кутията, и т.н., предпоследното дете взело $n-1$ бонбона и още една десета от останалите след това бонбони в кутията. За последното дете в кутията останали n бонбона. Намерете броя n на децата, ако е известно, че първите две деца са взели по равен брой бонбони.

Задача 10. В триъгълника ABC са взети точка P върху страната AC и точка Q върху страната AB, такива че $PC + QB = BC$. През точките P и Q е прекарана окръжност, която се допира до страната BC в точка M и $\sphericalangle QMP = 90^o - \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$. Намерете дължината на CM, ако $PC = 2$.

Време за работа - 5 часа

Драги кандидат-студенти,

- *номерирайте всички страници на беловата си;*
- *решението на всяка задача трябва да започва на нова страница;*
- *черновата не се проверява и не се оценява.*

Изпитната комисия ви пожелава успешна работа!