**Софийски Университет "Св. Климент Охридски"**

**Писмен конкурсен изпит по математика**

**20 май 2007г.**

## ЗАДАЧИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ - ТЕМА 2

**Задача 1.** Десетият и шестнадесетият член на аритметична прогресия са съответно равни на 14 и 26. Намерете третия член на прогресията.

*Решение.* Нека $a_1$ и $d$ са съответно първият член и разликата на аритметичната прогресия. От уравненията $a_{10} = a_1 + 9d = 14$ и $a_{16} = a_1 + 15d = 26$ намираме $d = 2$, $a_1 = -4$. Тогава $a_3 = a_1 + 2d = -4 + 4 = 0$.

**Задача 2.** Решете неравенството $3|x| \le 2 + |x+1|$.

*Решение.* Даденото неравенство е еквивалентно на неравенствата:

$$\mathbf{1)}\quad -3x \le 1 - x, \quad \text{ако} \quad x < -1; \quad \mathbf{2)}\quad -3x \le 3 + x, \quad \text{ако} \quad -1 \le x < 0; \quad \mathbf{3)}\quad 3x \le 3 + x, \quad \text{ако} \quad x \ge 0.$$

Решението на 1) е $x \ge -1/2$, което е несъвместимо с предположението $x < -1$; решението на 2) е $x \ge -3/4$, което заедно с $-1 \le x < 0$ ни дава решение $x \in [-3/4, 0)$; накрая, решението на 3) е $x \le 3/2$, което заедно с предположението $x \ge 0$ ни дава решение $x \in [0, 3/2]$. Окончателно, за решенията на даденото неравенство получаваме $x \in [-3/4, 0) \bigcup [0, 3/2] = [-3/4, 3/2]$.

**Задача 3.** Намерете всички решения на уравнението $\sin x + \cos x = 1$, които са в интервала $[0, \dfrac{\pi}{2}]$.

*Решение.* В интервала $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ функциите $\sin x$ и $\cos x$ приемат неотрицателни стойности, затова можем да повдигнем двете страни на даденото уравнение на квадрат, при което получаваме еквивалентното уравнение

$$2\sin x \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \text{т.е.} \quad 1 + \sin 2x = 1,$$

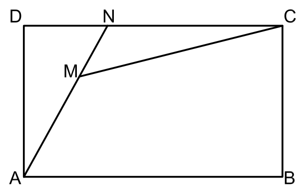
или $\sin 2x = 0$. Тъй като $2x$ принадлежи на интервала $[0, \pi]$, единствените решения на последното уравнение са $x_1 = 0$ и $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$. Това са и всичките решения на даденото уравнение в интервала $[0, \dfrac{\pi}{2}]$.

**Задача 4.** Лицето на околната повърхнина на правоъгълен паралелепипед е равно на 10, 16 или 18 в зависимост от това коя от стените му е избрана за основа. Намерете обема на паралелепипеда.

*Решение.* Да означим с $a$, $b$ и $c$ дължините на ръбовете, излизащи от един от върховете на паралелепипеда. От условието получаваме системата уравнения $2a(b+c) = 10$, $2b(a+c) = 16$, $2c(a+b) = 18$, или, еквивалентно, $ab+ac = 5$, $ab+bc = 8$ и $ac+bc = 9$. Събирайки почленно тези три уравнения, получаваме $2(ab+bc+ca) = 22$, или $ab + bc + ca = 11$. Чрез почленно изваждане от последното уравнение намираме $bc = 6$, $ca = 3$ и $ab = 2$. Умножавайки почленно последните три уравнения, намираме $a^2b^2c^2 = 36$, откъдето за обема $V$ на паралелепипеда намираме $V = abc = 6$.

**Задача 5.** Точката $M$ е във вътрешността или по контура на правоъгълник $ABCD$ със страни $AB = a$ и $BC = b$. Намерете възможно най-голямата стойност на сумата $MA + MC$.

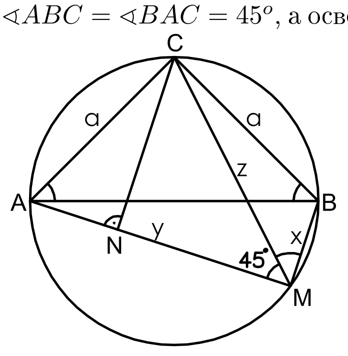
*Решение.* Очевидно $M$ не трябва да лежи върху диагонала $AC$, и можем да предположим, че $M \in \Delta ACD$. Ако $M$ е вътрешна за $\Delta ACD$, нека $N$ е пресечната точка на правата $AM$ със страната $CD$. От неравенството $MC < MN + NC$ получаваме $AM + MC < AM + MN + NC = AN + NC$, т.е., $AM + MC$ може да се увеличи, ако изберем $M \equiv N$. От друга страна, ако $N \ne D$, тогава от $AN < AD + DN$ следва $AN + NC < AD + DN + NC = AD + DC = b + a$. Окончателно получаваме $AM + MC \le a + b$, като равенството е изпълнено само при $M \equiv D$ или при $M \equiv B$. Така възможно най-голямата стойност на $MA + MC$ е $a + b$.




**Задача 6.** Около равнобедрен правоъгълен триъгълник $ABC$ с прав ъгъл при върха $C$ е описана окръжност. Върху дъгата $\overset{\frown}{AB}$ от окръжността, която не съдържа точката $C$, е взета точка $M$. От точката $C$ е спуснат перпендикуляр към правата $AM$, който пресича отсечката $AM$ във вътрешна точка $N$. Докажете, че $MN = AN + MB$.

*Решение.* Да означим $AC = BC = a$, $AM = y$, $MB = x$ и $CM = z$. От условието на задачата следва, че $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC = 45^o$, а освен това имаме $\sphericalangle AMC = \sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle BMC = \sphericalangle BAC$, тъй като съответните двойки ъгли се измерват с едни и същи дъги от окръжността. Отбелязваме, че $\sphericalangle CAM$ е остър, защото в противен случай точката $N$ няма да е вътрешна за отсечката $AM$. Като следствие, $\sphericalangle BAM < 45^o$, и $y > x$. От косинусовата теорема за $\Delta AMC$ и $\Delta BMC$ намираме $y^2 + z^2 - 2yz\frac{\sqrt{2}}{2} = z^2 + x^2 - 2xz\frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$, откъдето получаваме $x^2 - \sqrt{2}xz = y^2 - \sqrt{2}yz$, $(x-y)(x+y) = \sqrt{2}z(x-y)$, и понеже $x \ne y$,

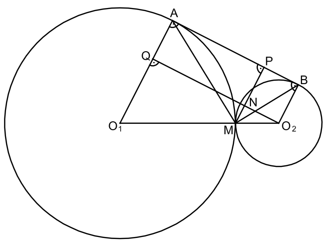
$$x + y = \sqrt{2}z.$$




Триъгълникът $MNC$ е правоъгълен и равнобедрен, затова $z = \sqrt{2}MN$. Като заместим в горното равенство, получаваме $x + y = \sqrt{2}.\sqrt{2}MN = 2MN$, т.е., $MB + AN + NM = 2NM$, откъдето следва $MB + AN = MN$.

**Задача 7.** Две окръжности с радиуси 4 и 1 се допират външно в точка $M$, а общата им външна допирателна се допира до тях в точки $A$ и $B$. Намерете лицето на триъгълника $AMB$.

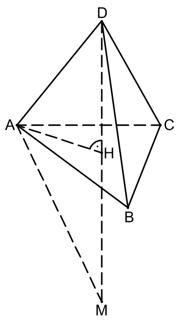
*Решение.* Нека $O_1$ и $O_2$ са центровете на двете окръжности с радиуси съответно 4 и 1, а $P$ е петата на перпендикуляра, спуснат от $M$ към $AB$. През точката $O_2$ прекарваме права, успоредна на $AB$, която пресича отсечките $MP$ и $O_1A$ съответно в точките $N$ и $Q$. Триъгълникът $O_1O_2Q$ е




правоъгълен с катет $O_1Q = 4 - 1 = 3$ и хипотенуза $O_1O_2 = 4 + 1 = 5$, и от Питагоровата теорема намираме $O_2Q = 4$. Тъй като $QO_2BA$ е правоъгълник, следва, че $AB = 4$. Триъгълниците $NMO_2$ и $QO_1O_2$ са подобни, затова $\frac{MN}{O_1Q} = \frac{MN}{3} = \frac{O_2M}{O_2O_1} = \frac{1}{5}$, откъдето намираме $MN = \frac{3}{5}$. Следователно за височината към страната $AB$ в $\Delta AMB$ получаваме $MP = MN + NP = \frac{3}{5} + 1 = \frac{8}{5}$. Лицето $S$ на $\Delta AMB$ намираме от $S = \frac{1}{2}AB.MP = \frac{16}{5}$.

**Задача 8.** В триъгълна пирамида $ABCD$ ръбовете $AD$, $BD$ и $CD$ имат равни дължини и са два по два взаимно перпендикулярни. Радиусът на описаната около пирамидата сфера е $R$. Намерете обема на пирамидата.

*Решение.* Да означим с $\ell$ дължината на околните ръбове $DA$, $DB$ и $DC$ на пирамидата, тогава основата ѝ $ABC$ е равностранен триъгълник с дължина на страната $\ell\sqrt{2}$. Нека $H$ е ортогоналната проекция на върха $D$ върху основата $ABC$, тогава $H$ е центърът на описаната около $\Delta ABC$ окръжност, а радиусът ѝ е $AH = \sqrt{2}\ell\frac{\sqrt{3}}{3} = \ell\frac{\sqrt{6}}{3}$. Центърът на описаната около пирамидата сфера лежи върху правата $DH$, и нека



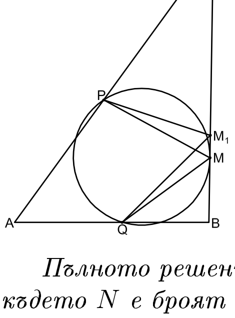

означим с $M$ другия край на диаметъра на сферата, който минава през точката $D$. Триъгълникът $AMD$ е вписан в окръжност с диаметър $AM = 2R$, следователно е правоъгълен с прав ъгъл при върха $A$, и $AH$ е височина към хипотенузата му $DM$. От Питагоровата теорема за правоъгълния триъгълник $AHD$ намираме $DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \ell\frac{\sqrt{3}}{3}$. От формулата $AD^2 = DH.DM$ за правоъгълния триъгълник $DAM$ получаваме $\ell^2 = \ell\frac{\sqrt{3}}{3}.2R$, и от тук $\ell = \frac{2}{\sqrt{3}}R$. Тъй като околните ръбове $DA$, $DB$ и $DC$ са два по два взаимно перпендикулярни, $AD$ е височина към стената $BCD$ на пирамидата $ABCD$, и за обема ѝ $V$ намираме $V = \frac{1}{3}S_{BCD}.AD = \frac{1}{3}.\frac{BD.CD}{2}.AD = \frac{1}{6}\ell^3 = \frac{4\sqrt{3}}{27}R^3$.

**Задача 9.** Група от $n$ деца си разделили кутия бонбони. Първото дете взело 1 бонбон и още една десета от останалите в кутията бонбони. След него второто взело 2 бонбона и още една десета от останалите след това бонбони в кутията, и т.н., предпоследното дете взело $n - 1$ бонбона и още една десета от останалите след това бонбони в кутията. За последното дете в кутията останали $n$ бонбона. Намерете броя $n$ на децата, ако е известно, че първите две деца са взели по равен брой бонбони.

*Решение.* Нека $s$ е първоначалният брой на бонбоните в кутията, тогава първото дете е взело $1 + (s - 1)/10$ бонбона, а второто е взело $2 + \big(s - 3 - (s - 1)/10\big)/10$ бонбона. По условие, те са взели равен брой бонбони, и от приравняването на двата израза получаваме $s = 81$. От тук намираме, че първите две деца са взели по 9 бонбона. Ще докажем чрез индукция, че всяко от първите $n - 1$ деца е взело 9 бонбона. Това е вярно за първите две деца, и нека допуснем, че първите $m$ деца $(2 \leq m < n-1)$ са взели по 9 бонбона, тогава съгласно условието, $(m+1)$-вото дете е взело $m + 1 + \big(81 - 9m - (m + 1)\big)/10 = 9$ бонбона. Следователно първите $n - 1$ деца са взели по 9 бонбона, или общо $9(n-1)$ бонбона, които добавени към $n$-те бонбона, взети от последното дете, правят 81 бонбона, т.е., $9(n - 1) + n = 81$. От тук намираме $n = 9$.

**Задача 10.** В триъгълника $ABC$ са взети точка $P$ върху страната $AC$ и точка $Q$ върху страната $AB$, такива че $PC + QB = BC$. През точките $P$ и $Q$ е прекарана окръжност, която се допира до страната $BC$ в точка $M$ и $\sphericalangle QMP = 90^o - \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$. Намерете дължината на $CM$, ако $PC = 2$.

*Решение.* Да означим с $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ ъглите на $\Delta ABC$ съответно при върховете $A$, $B$ и $C$. Нека точката $M_1$ върху




страната $BC$ е такава, че $BM_1 = BQ$ и $CM_1 = CP$. Тогава триъгълниците $PCM_1$ и $QBM_1$ са равнобедрени, и

$$\sphericalangle PM_1Q = 180^o - \sphericalangle CM_1P - \sphericalangle BM_1Q = 180^o - \frac{180^o - \gamma}{2} - \frac{180^o - \beta}{2} = 90^o - \frac{\alpha}{2}.$$

Но по условие $\sphericalangle PMQ = 90^o - \frac{\alpha}{2}$, и понеже $M$ е допирната точка на окръжността до страната $BC$, равенството $\sphericalangle PM_1Q = \sphericalangle PMQ$ ще бъде изпълнено само ако $M_1 \equiv M$ (в противен случай точката $M_1$ е външна за окръжността, и тогава $\sphericalangle PM_1Q < \sphericalangle PMQ$). Следователно $CM = CP = 2$.

*Пълното решение на всяка задача се оценява с 4 точки. Оценката се получава по формулата $2 + 0,1.N$, където $N$ е броят на получените точки.*