Софийски Университет "Св. Климент Охридски"
Писмен конкурсен изпит по математика, 9 юли 2009г.

ТЕМА 1

Задача 1. Да се реши уравнението

$$(x^2 - 6x + 5)\sqrt{x-4} = 0\,.$$

Задача 2. Даден е триъгълник ABC със страна $AC = 3$, радиус на описаната окръжност $R = \frac{7}{\sqrt{3}}$, и $\sphericalangle CAB = 60^o$. Да се намерят дължините на страните AB и BC.

Задача 3. Нека $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ е аритметична прогресия, за която $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ и $a_2 + a_3 + a_4 = 4$. Да се намери сумата на първите 18 члена на прогресията.

Задача 4. Даден е ромб $ABCD$ със страна $AB = 4$ и $\sphericalangle BAD = 60^o$. Вписаната в ромба окръжност се допира до страните AB, BC, CD, DA съответно в точките M, N, P и Q. Да се намери лицето на четириъгълника $MNPQ$.

Задача 5. Да се реши неравенството

$$\log_2 x + 2\log_x 2 < 3\,.$$

Задача 6. Да се реши системата

$$\left|\begin{array}{l} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ 3.2^x - 2^{y+2} = 4\,. \end{array}\right.$$

Задача 7. Нека T е точка от страната AB на триъгълника ABC. Да се намерят дължините на страните AC и BC, ако $AT = 2$, $BT = 4$, $CT = 5$, и окръжностите вписани в триъгълниците ACT и BCT се допират помежду си.

Задача 8. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които неравенството

$$2\sin 2x - \sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x + a + 2 < 0$$

е изпълнено за всяко $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

Задача 9. Нека $ABCD$ е триъгълна пирамида с ръбове $AB = AC = DA = DB = DC = 1$. През върха A, перпендикулярно на стената BCD и успоредно на ръба BC, е прекарана равнина λ. Нека λ пресича ръбовете DB и DC съответно в точки M и N, и отношението на обемите на пирамидите $MNDA$ и $BCDA$ е

$$\frac{V_{MNDA}}{V_{BCDA}} = \frac{16}{25}.$$

Да се намери обемът на пирамидата $ABCD$.

Задача 10. Нека $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, където a, b и c са реални числа, и

$$|f(x)| \leq 2(1 - x^2) \ \text{ за всяко } \ x \in [-1, 1].$$

Да се намери възможно най-голямата стойност на $|f'(x)|$ в интервала $[-1, 1]$.

Време за работа - 5 часа

Драги кандидат-студенти,

- *номерирайте всички страници на беловата си;*
- *решението на всяка задача трябва да започва на нова страница;*
- *черновата не се проверява и не се оценява.*

Изпитната комисия ви пожелава успешна работа!

Софийски Университет "Св. Климент Охридски"

Писмен конкурсен изпит по математика, 9 юли 2009г.

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ - ТЕМА 1

Задача 1. Да се реши уравнението
$$(x^2-6x+5)\sqrt{x-4}=0\,.$$

Решение. Равенството е в сила при $\sqrt{x-4}=0$ или $x^2-6x+5=0$. Решенията на квадратното уравнение са $x=1$ и $x=5$, но от тях само $x=5$ е решение на даденото уравнение, тъй като допустимите стойности за x са $x\geq 4$. Окончателно, решенията на даденото уравнение са $x=4$ и $x=5$.

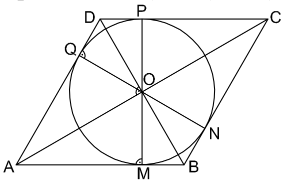
Задача 2. Даден е триъгълник ABC със страна $AC=3$, радиус на описаната окръжност $R=\frac{7}{\sqrt{3}}$, и $\sphericalangle CAB=60^o$. Да се намерят дължините на страните AB и BC.

Решение. От синусовата теорема за ΔABC намираме $BC=2R\sin\sphericalangle CAB=7$. От косинусовата теорема за ΔABC получаваме $AB^2+3^2-2.3.AB\cos 60^o=7^2$, т.е., $AB^2-3.AB-40=0$. Положителният корен на последното уравнение е $AB=8$. Окончателно получаваме $AB=8$, $BC=7$.

Задача 3. Нека $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots$ е аритметична прогресия, за която $a_1+a_2+a_3=1$ и $a_2+a_3+a_4=4$. Да се намери сумата на първите 18 члена на прогресията.

Решение. Ако d е разликата на прогресията, имаме $a_1+a_2+a_3=3a_1+3d=1$ и $a_2+a_3+a_4=3a_1+6d=4$, откъдето получаваме $d=1$ и $a_1=-\frac{2}{3}$. От формулата $S_n=\dfrac{(2a_1+(n-1)d).n}{2}$ намираме $S_{18}=141$.

Задача 4. Даден е ромб $ABCD$ със страна $AB=4$ и $\sphericalangle BAD=60^o$. Вписаната в ромба окръжност се допира до страните AB, BC, CD, DA съответно в точките M, N, P и Q. Да се намери лицето на четириъгълника $MNPQ$.



Решение. Пресечната точка O на диагоналите AC и BD е център на вписаната в ромба окръжност, а MP и NQ са височините на ромба през точката O. Тъй като $MP\perp AB$ и $NQ\perp AD$, то $\sphericalangle QOM=\pi-\sphericalangle BAD=120^o$. Освен това $MP=NQ=AD\sin 60^o=2\sqrt{3}$. Тогава $S_{MNPQ}=\frac{1}{2}MP.NQ\sin 120^o=3\sqrt{3}$.

Задача 5. Да се реши неравенството
$$\log_2 x+2\log_x 2<3.$$

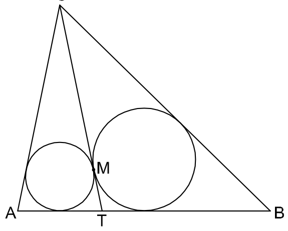
Решение. Неравенството има смисъл при $x>0$ и $x\neq 1$. Полагаме $t=\log_2 x \quad (t\neq 0)$. Тогава $\log_x 2=\frac{1}{t}$ и получаваме неравенството $\frac{t^2-3t+2}{t}<0$, или $t(t-1)(t-2)<0$, чиито решения са $t\in(-\infty,0)\cup(1,2)$. От $-\infty<\log_2 x<0$ и $1<\log_2 x<2$ получаваме съответно $x\in(0,1)$ и $x\in(2,4)$. Отговор: $x\in(0,1)\cup(2,4)$.

Задача 6. Да се реши системата
$$\left|\begin{array}{l} x^2-xy-2y^2=0\\ 3.2^x-2^{y+2}=4\,. \end{array}\right.$$

Решение. От първото уравнение следва, че x и y са едновременно равни на нула или различни от нула. От второто уравнение проверяваме, че $x=y=0$ не е решение на системата, следователно $x.y\neq 0$. Затова можем да разделим първото уравнение на y^2 и да получим уравнението $t^2-t-2=0$, $t=x/y$. Неговите корени са $t_1=-1$ и $t_2=2$.
Случай 1: $t_1=-1$, т.е. $y=-x$. Заместването във второто уравнение ни дава $3.2^x-2^{-x+2}=4 \Leftrightarrow 3.u^2-4.u-4=0$, където $u=2^x$ $(u>0)$. От тук намираме $u_1=2$ и $u_2=-\frac{2}{3}$. Уравнението $2^x=-\frac{2}{3}$ няма реални корени, а от $2^x=2$ получаваме едно решение на системата: $x_1=1,\ y_1=-1$.
Случай 2: $t_2=2$, т.е. $x=2y$. Заместваме във второто уравнение и получаваме същото квадратно уравнение за u, този път с $u=2^y$. Както в *Случай 1*, получаваме $y_2=1$, а от $x=2y$ намираме $x_2=2$.

Окончателно, системата има две решения: $x_1=1,\ y_1=-1$, и $x_2=2,\ y_2=1$.

Задача 7. Нека T е точка от страната AB на триъгълника ABC. Да се намерят дължините на страните AC и BC, ако $AT=2$, $BT=4$, $CT=5$, и окръжностите вписани в триъгълниците ACT и BCT се допират помежду си.



Решение. Нека M е общата допирна точка на двете окръжности с CT. Да означим с p_1 и p_2 полупериметрите съответно на ΔACT и ΔBCT. Имаме, че $TM=p_1-b=p_2-a$, откъдето $a-b=p_2-p_1$. От друга страна, $p_2-p_1=\frac{1}{2}(a+CT+BT)-\frac{1}{2}(b+CT+AT)=\frac{1}{2}(a-b)+1$. Тогава $a-b=\frac{1}{2}(a-b)+1$, и $a-b=2$.

Нека $\sphericalangle ATC=\varphi$, тогава $\sphericalangle BTC=\pi-\varphi$, и от косинусовата теорема за триъгълниците BCT и ACT имаме $a^2=4^2+5^2+2.4.5\cos\varphi$, $b^2=2^2+5^2-20\cos\varphi$, т.е. $a^2=41+40\cos\varphi$, $b^2=29-20\cos\varphi$. От тук следва $a^2+2b^2=99$, и като заместим $a=b+2$, получаваме квадратното уравнение $3b^2+4b-95=0$. Единственият му положителен корен е $b=5$, и тогава $a=7$. Окончателно намираме $BC=7$, $AC=5$.

Задача 8. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които неравенството

$$2\sin 2x - \sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x + a + 2 < 0$$

е изпълнено за всяко $x \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$.

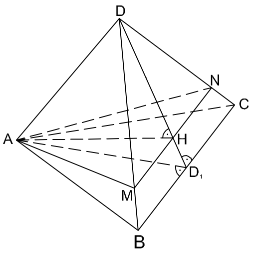
Решение. Полагаме $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \pi/4)$, и получаваме неравенството $f(t) = 2t^2 - \sqrt{2}t + a < 0$. Условието $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{3}]$, т.е. $\frac{\pi}{2} \le x + \frac{\pi}{4} \le \pi$ е равносилно с $0 \le \sin(x + \frac{\pi}{4}) \le 1$, или $t \in [0, \sqrt{2}]$. Следователно даденото неравенство е изпълнено за всяко x от интервала $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ точно когато квадратното неравенство $f(t) < 0$ е изпълнено за всяко $t \in [0, \sqrt{2}]$. Нека D е дискриминантата на $f(t)$. Ако $D \le 0$, неравенството $f(t) < 0$ няма решение, и условието не е изпълнено. Нека $D > 0$ и $t_1 < t_2$ са корените на f. Решенията на неравенството $f(t) < 0$ са $t \in (t_1, t_2)$, и то ще бъде изпълнено за всяко $t \in [0, \sqrt{2}]$ само ако $t_1 < 0 < \sqrt{2} < t_2$. Условията за това са $f(0) < 0$ и $f(\sqrt{2}) < 0$, при това от всяко от тези неравенства следва $D > 0$. От $f(0) = a < 0$ и $f(\sqrt{2}) = 2 + a < 0$ получаваме $a \in (-\infty, -2)$.

Задача 9. Нека $ABCD$ е триъгълна пирамида с ръбове $AB = AC = DA = DB = DC = 1$. През върха A, перпендикулярно на стената BCD и успоредно на ръба BC, е прекарана равнина λ. Нека λ пресича ръбовете DB и DC съответно в точки M и N, и отношението на обемите на пирамидите $MNDA$ и $BCDA$ е

$$\frac{V_{MNDA}}{V_{BCDA}} = \frac{16}{25}.$$

Да се намери обемът на пирамидата $ABCD$.

Решение. Нека D_1 е средата на BC, тогава $AD_1 \perp BC$ и $DD_1 \perp BC$ като медиани към основата BC съответно на равнобедрените триъгълници ABC и DBC. Поради това равнината AD_1D е перпендикулярна на ръба BC, и ако AH е височината към страната DD_1 в ΔAD_1D, то от $AH \perp DD_1$ и $AH \perp BC$ следва, че AH е височината на пирамидата към стената BCD. Равнината λ съдържа AH и пресича стената BCD в отсечката MN, $MN \parallel BC$.



Тъй като пирамидите $MNDA$ и $BCDA$ имат една и съща височина AH от върха A, имаме $V_{MNDA} : V_{BCDA} = S_{MND} : S_{BCD}$. Понеже $\Delta MND \sim \Delta BCD$, имаме $S_{MND} : S_{BCD} = DH^2 : DD_1^2 = 16 : 25$, и $DH : DD_1 = 4 : 5$. Нека $AD_1 = DD_1 = x$, тогава $DH = \frac{4}{5}x$ и $HD_1 = \frac{1}{5}x$. От Питагоровата теорема за триъгълниците AHD и AHD_1 получаваме $AH^2 = 1 - \frac{16}{25}x^2 = x^2 - \frac{1}{25}x^2$, откъдето $x = \sqrt{\frac{5}{8}}$ и $AH = \sqrt{\frac{3}{5}}$. От Питагоровата теорема за триъгълника ABD_1 намираме $BD_1^2 = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$, и от тук $BC = 2BD_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}$. За лицето на ΔBCD получаваме $S_{BCD} = \frac{1}{2}BC.DD_1 = \frac{\sqrt{15}}{8}$. Тогава $V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{BCD}.AH = \frac{1}{8}$.

Задача 10. Нека $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, където a, b и c са реални числа, и

$$|f(x)| \le 2(1 - x^2) \quad \text{за всяко} \quad x \in [-1, 1].$$

Да се намери възможно най-голямата стойност на $|f'(x)|$ в интервала $[-1, 1]$.

Решение. От условието следва, че $|f(-1)| \le 0$ и $|f(1)| \le 0$, а от тук $f(-1) = f(1) = 0$, т.е., $-1 + a - b + c = 0$ и $1 + a + b + c = 0$. От тези равенства намираме $c = -a$ и $b = -1$, и от там $f(x) = x^3 + ax^2 - x - a = (x^2 - 1)(x + a)$. Условието за $f(x)$ се свежда до $(1 - x^2)|x + a| \le 2(1 - x^2)$ за всяко $x \in [-1, 1]$, следователно трябва да са изпълнени неравенствата $-2 \le x + a \le 2$ за всяко $x \in [-1, 1]$. Тъй като $x + a$ расте монотонно, необходимо и достатъчно е първото от двете неравенства да е изпълнено за $x = -1$, а второто да е изпълнено за $x = 1$, т.е., $-2 \le -1 + a$ и $1 + a \le 2$. Така установяваме, че всички функции $f(x)$ удовлетворяващи условията на задачата имат вида $f(x) = x^3 + ax^2 - x - a$, където $-1 \le a \le 1$. Функцията $f'(x) = 3x^2 + 2ax - 1$ задава парабола с връх $x_0 = -\frac{a}{3} \in (-1, 1)$, и най-малката ѝ стойност е $f'(x_0) = -1 - \frac{a^2}{3} \ge -\frac{4}{3}$. За най-голямата стойност на $f'(x)$ в $[-1, 1]$ получаваме

$$\max_{x \in [-1,1]} f'(x) = \max\{f'(-1), f'(1)\} = \max\{2 - 2a, 2 + 2a\} \le 4, \quad \text{с равенство при} \quad a = -1 \quad \text{или} \quad a = 1.$$

Получихме, че за всяка функция f от разглеждания клас е изпълнено $-\frac{4}{3} \le f'(x) \le 4$ при $x \in [-1, 1]$. Следователно $\max\limits_{x \in [-1,1]} |f'(x)| \le 4$, като равенството се достига за $f(x) = (x^2 - 1)(x - 1)$ и $f(x) = (x^2 - 1)(x + 1)$.

Пълното решение на всяка задача се оценява с 4 точки. Оценката се получава по формулата $2 + 0,1.N$, където N е броят на получените точки.