Софийски Университет „Св. Климент Охридски”
Писмен конкурсен изпит по математика
28март 2010 г.

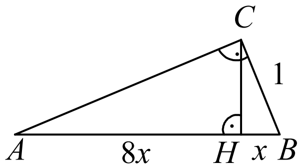
ЗАДАЧИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ – ТЕМА 3

Задача 1. Да се пресметне стойността на израза $\dfrac{1-\cos^4 x-\sin^4 x}{1-\cos^2 2x}$.

Решение: При $x \neq k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, $1-\cos^2 2x \neq 0$ и преобразуваме израза по следния начин:

$$\frac{1-\cos^4 x-\sin^4 x}{1-\cos^2 2x}=\frac{1-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2+2\sin^2 x.\cos^2 x}{\sin^2 2x}=\frac{1-1+2\sin^2 x.\cos^2 x}{4\sin^2 x.\cos^2 x}=\frac{2\sin^2 x.\cos^2 x}{4\sin^2 x.\cos^2 x}=\frac{1}{2}.$$

Задача 2. В правоъгълен триъгълник *ABC* с хипотенуза *AB*, $CH \perp AB\,(H \in AB)$ и $AH:HB=8:1$. Да се намери периметърът на триъгълника, ако дължината на по-малкия катет е 1.
Решение: Нека $AH=8x,\ HB=x, AB=9x$. От $AC^2=AH.AB=72x^2$ и $BC^2=BH.BA=9x^2$ следва, че $AC>BC$. Тогава $BC=1$ и $1^2=9x^2$. Оттук намираме $x=\frac{1}{3}$, $AB=9x=3$, $AC=6\sqrt{2}x=2\sqrt{2}$. Следователно $AB+BC+CA=4+2\sqrt{2}$.

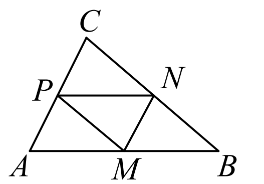


Задача 3. Да се реши неравенството $x-1 \leq \dfrac{x-1}{x^2-8x+16}$.

Решение: Неравенството е еквивалентно на $\left(x-1\right)\left(1-\dfrac{1}{x^2-8x+16}\right)\leq 0$. Като приведем под общ знаменател и разложим на множители, получаваме $\dfrac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(x-4)^2}\leq 0$. Множеството от допустимите стойности е $x \neq 4$. При $x \neq 4$ неравенството е еквивалентно на $(x-1)(x-3)(x-5)\leq 0$, което има решения $x\in(-\infty;1]\cup[3;5]$. Окончателно получаваме $x\in(-\infty;1]\cup[3;4)\cup(4,5]$.

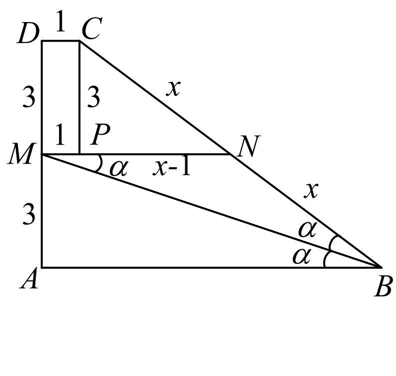
Задача 4. Върху страните *AB*, *BC* и *CA* на триъгълника *ABC* са избрани съответно точки *M*, *N* и *P*, така че $PN \parallel AB$, $NM \parallel CA$ и $MP \parallel BC$. Да се намери лицето на *ABC*, ако лицето на *MNP* е $\dfrac{3}{4}$.

Решение: От $PN \parallel AB$ и $NM \parallel CA$ следва, че $PAMN$ е успоредник и $PN=AM$. От $PN \parallel AB$ и $MP \parallel BC$ следва, че $PMBN$ е успоредник и $PN=MB$. Следователно $AM=MB$, т.е. М е средата на *AB*. Аналогично получаваме, че *N* и *P* са средите съответно на *BC* и *CA*. Тогава $S_{ABC}=4S_{MNP}=3$.



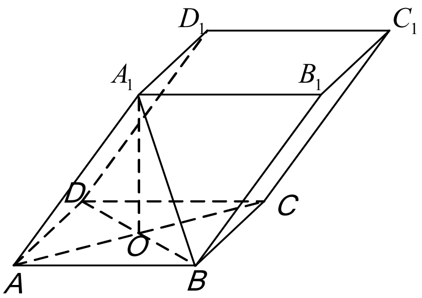
Задача 5. Да се реши неравенството $x-3-\sqrt{3x-5}\leq 0$.
Решение: Множеството от допустимите стойности е $x \geq \dfrac{5}{3}$. Записваме неравенството във вида $x-3\leq\sqrt{3x-5}$, което е изпълнено за всяко $x\in\left[\frac{5}{3};3\right]$. При $x>3$ повдигаме на квадрат, откъдето $x^2-9x+14\leq 0$. Решение на последното неравенство е $x\in\left[2;7\right]$. Окончателно $x\in\left[\frac{5}{3};7\right]$.

Задача 6. Даден е правоъгълен трапец $ABCD\,(AB \parallel CD, AB>CD)$ с прав ъгъл при върха A. Ъглополовящата на $\sphericalangle ABC$ пресича бедрото *AD* в средата му *M*. Да се намери лицето на трапеца, ако $AD=6$ и $CD=1$.
Решение: Нека *MN* е средната основа на трапеца. От $MN \parallel AB$ и $\sphericalangle ABM=\sphericalangle MBC$ следва, че $\sphericalangle BMN=\sphericalangle MBN$. Тогава $MN=BN=NC=x$. Нека $CP\perp MN, P\in MN$. Тогава $MPCN$ е



правоъгълник, откъдето $MP = CD = 1$, $PC = MD = 3$ и $PN = x - 1$. От правоъгълния ΔCPN намираме $x^2 = (x-1)^2 + 3^2$, т.е. $x = 5 = MN$. Оттук $S_{ABCD} = MN.AD = 30$.

Задача 7. Основата на четириъгълна призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е квадрат $ABCD$ със страна $\sqrt{2}$. Ръбът AA_1 образува с ръбовете AB и AD ъгли с големина 60°. Да се намери обемът на призмата, ако ортогоналната проекция на върха A_1 върху равнината на основата лежи на отсечката BD.

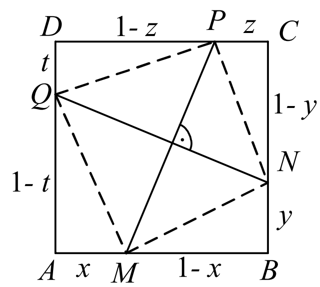


Решение: Нека *O* е ортогоналната проекция на върха A_1 върху равнината на основата. От $\sphericalangle BAA_1 = \sphericalangle DAA_1 = 60^\circ$ и $AB = AD$ следва, че $\triangle ABA_1 \cong \triangle ADA_1$ и $A_1B = A_1D$. Тъй като *O* лежи на BD и $A_1O \perp AD$, то $\triangle OBA_1 \cong \triangle ODA_1$ и $OB = OD$, откъдето $O = AC \cap BD$. От $OA = OB \Rightarrow AA_1 = A_1B$. Тъй като $\sphericalangle BAA_1 = 60^\circ$, то $\triangle ABA_1$ е равностранен и $AA_1 = AB = \sqrt{2}$. От $\triangle AOA_1$ имаме $OA_1^2 = AA_1^2 - AO^2 = 2 - 1 = 1$. Оттук $V = S_{ABCD} OA_1 = 2.1 = 2$.

Задача 8. Да се намерят реалните числа *a* и *b*, ако е известно, че уравнението $x^2 + ax + b = 0$ има реални корени x_1, x_2, такива че $5x_1^2 + 5x_2^2 = 4a - 6b - 1$.

Решение: Тъй като уравнението $x^2 + ax + b = 0$ има реални корени, то, $D = a^2 - 4b \ge 0$. По формулите на Виет намираме $5x_1^2 + 5x_2^2 = 5(x_1 + x_2)^2 - 10x_1x_2 = 5a^2 - 10b$. Оттук $5a^2 - 10b = 4a - 6b - 1$ или $5a^2 - 4a + 1 = 4b$. Но $4b \le a^2$, така че $5a^2 - 4a + 1 \le a^2$, т.е. $(2a-1)^2 \le 0$. Следователно $a = \frac{1}{2}$ и $b = \frac{1}{16}$. При $a = \frac{1}{2}$ и $b = \frac{1}{16}$ уравнението $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = 0$ има корени $x_1 = x_2 = -\frac{1}{4}$, за които $5x_1^2 + 5x_2^2 = \frac{5}{8} = 4.\frac{1}{2} - 6.\frac{1}{16} - 1$.

Задача 9. Даден е квадрат *ABCD* със страна 1. Точките *M*, *N*, *P* и *Q* съответно върху страните *AB*, *BC*, *CD* и *DA* са такива, че $MP \perp NQ$. Да се намери $QA + AM + NC + CP$.



Решение: Означаваме $AM = x$, $BM = 1 - x$, $BN = y$, $CN = 1 - y$, $CP = z$, $DP = 1 - z$, $DQ = t$ и $AQ = 1 - t$. Тъй като *MNPQ* е четириъгълник с перпендикулярни диагонали, то $MN^2 + PQ^2 = NP^2 + QM^2$. Оттук
s $y^2 + (1-x)^2 + t^2 + (1-z)^2 = z^2 + (1-y)^2 + x^2 + (1-t)^2$ или $x + z = y + t$.
Тогава $1 - x + 1 - z = 1 - y + 1 - t$. Оттук получаваме
$x + (1-t) + z + (1-y) = y + (1-x) + t + (1-z)$, т.е.
$QA + AM + NC + CP = BN + BM + DQ + DP$.
Тъй като $QA + AM + NC + CP + BN + BM + DQ + DP = 4$, то $QA + AM + NC + CP = 2$.

Задача 10. Нека a, b и c са реални числа, такива че множеството от решенията на системата
$$\begin{vmatrix} ax^4 < bx^2 + c \\ bx^4 < cx^2 + a \\ cx^4 < ax^2 + b \end{vmatrix}$$
, съдържа точно три цели числа. Да се докаже, че a, b и c са страни на триъгълник.

Решение: Ако цялото число x_0 е решение на системата, то и $-x_0$ е решение. Тогава 0 е решение на системата, защото броят на целите решения е нечетен. Оттук получаваме, че $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$. Ако *x* е решение на системата, то *x* е решение на неравенството $(a+b+c)(x^4 - x^2 - 1) < 0$. Тъй като $a + b + c > 0$, решения му са $x \in \left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}; \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \right)$, откъдето намираме, че целите решения на системата са –1, 0 и 1. Тогава $a < b + c$, $b < c + a$ и $c < a + b$, откъдето следва, че a, b и c са страни на триъгълник.

Пълното решение на всяка задача се оценява с 4 точки. Оценката се получава по формулата 2 + 0,1.N, където N е броят на получените точки.