

Софийски Университет „Св. Климент Охридски“

Писмен конкурсен изпит по математика

11 юли 2011 година

Тема №2

Задача 1. Да се реши неравенството: $\frac{1}{x+1} \left| \frac{x+2}{x-1} \right| < 2$.

Задача 2. За аритметична прогресия с 209 члена знаем, че сумата на членовете с номера, кратни на 5, е 123. Да се намери сумата на членовете на прогресията.

Задача 3. Да се реши системата: $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^4 - x^2y^2 + y^4 = 13 \end{cases}$.

Задача 4. Да се намерят дължините на страните на успоредник с лице 120, ако дължините на диагоналите му са 10 и 26.

Задача 5. Паролата на електронната поща на Мечо Пух е образувана чрез разместване на буквите в думата „ПОЖАРНИКАРКА“. В паролата между съгласните букви няма гласни букви. Какъв е броят на паролите, отговарящи на тези правила? Отговорът да се представи като произведение на цели положителни степени на различни прости числа.

Задача 6. Да се реши уравнението:

$$\log_3 (25^x + 4 \cdot 5^x - 5) = \log_5 (1 + 5^{1-x}) + \log_5 (25^x - 5^x) .$$

Задача 7. През началото $O(0, 0)$ на координатната система са прекарани двете допирателни към параболата $y = x^2 + x + 1$. Ако A и B са допирните точки, да се намери лицето на триъгълника OAB .

Задача 8. Страните на триъгълника $\triangle ABC$ са $AB = 10$, $BC = 12$, $AC = 14$. Точката M лежи на страната AC , а точката N лежи на страната BC (M или N може да съвпада с връх на $\triangle ABC$) като MN разделя $\triangle ABC$ на две фигури с равни лица. Да се намерят най-малката и най-голямата възможна дължина на MN .

Задача 9. Да се намерят стойностите на параметъра a , за които уравнението $a \sin x \cos x = \sin x - \cos x$ има точно два различни корена в интервала $[0, \pi]$.

Задача 10. Точката M лежи на страната CD на квадрат $ABCD$, като $DM = 2MC$. Окръжността, минаваща през M , върха D и средата N на отсечката BM , пресича AM в точка P . Да се намери отношението $AP : PM$.

Време за работа: 5 часа

Драги кандидат-студенти,

- номерирайте всички страници на беловата си;
- означавайте ясно началото и края на решението на всяка отделна задача;
- решението на всяка задача трябва да започва на нова страница;
- не смесвайте белова и чернова;
- черновата не се проверява и не се оценява.

Изпитната комисия ви пожелава успешна работа!