Софийски Университет „Св. Климент Охридски“

Писмен конкурсен изпит по математика
11 юли 2011 година, Тема №2

Примерни решения

Задача 1. Да се реши неравенството: $\dfrac{1}{x+1}\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right| < 2$.

Решение. I. Всяко $x<-1$ е решение на неравенството.
II. Търсим решения в интервала $(-1,\,1)$. Тогава $\dfrac{x+2}{x-1}<0$ и неравеството е $\dfrac{-(x+2)}{(x+1)(x-1)}<2$, еквивалентно на $2x^2+x<0$, с решения $\left(-\dfrac{1}{2},\,0\right)$.
III. Търсим решения в интервала $(1,\,+\infty)$. Тогава $\dfrac{x+2}{x-1}>0$ и неравеството е $\dfrac{x+2}{(x+1)(x-1)}<2$, еквивалентно на $2x^2-x-4>0$, с решения $\left(-\infty,\,\dfrac{1-\sqrt{33}}{4}\right)\cup\left(\dfrac{1+\sqrt{33}}{4},\,+\infty\right)$. Решенията в този случай са $\left(\dfrac{1+\sqrt{33}}{4},\,+\infty\right)$. Отговор: $(-\infty,\,-1)\cup\left(-\dfrac{1}{2},\,0\right)\cup\left(\dfrac{1+\sqrt{33}}{4},\,+\infty\right)$.

Задача 2. За аритметична прогресия с 209 члена знаем, че сумата на членовете с номера, кратни на 5, е 123. Да се намери сумата на членовете на прогресията.

Решение. Нека прогресията е $a_1,\,a_2,\,\ldots\,a_{209}$. Членовете $a_5,\,a_{10},\,\ldots\,a_{205}$, с номера, кратни на 5, също образуват аритметична прогресия и са 41 на брой. За тяхната сума S^* имаме
$123=S^*=41\,\dfrac{a_5+a_{205}}{2}=41\,a_{105}$, откъдето $a_{105}=3$.

За търсената сума S намираме $S=209\,\dfrac{a_1+a_{209}}{2}=209\,a_{105}=627$.

Задача 3. Да се реши системата: $\left|\begin{array}{c} x+y=1 \\ x^4-x^2y^2+y^4=13 \end{array}\right.$.

Решение. Използваме тъждеството
$x^4+y^4-x^2y^2=\left(x^2+y^2\right)^2-3\,x^2y^2=\left((x+y)^2-2\,xy\right)^2-3\,x^2y^2$. След полагане $t=xy$ второто уравнение е $(1-2\,t)^2-3\,t^2=13$, или $t^2-4\,t-12=0$ с корени -2 и 6. Системата $\left|\begin{array}{c} x+y=1 \\ xy=-2 \end{array}\right.$ има решения $(-1\,;\,2)$ и $(2\,;\,-1)$, а системата $\left|\begin{array}{c} x+y=1 \\ xy=6 \end{array}\right.$ няма решение.

Задача 4. Да се намерят дължините на страните на успоредник с лице 120, ако дължините на диагоналите му са 10 и 26.

Решение. Нека φ е острия ъгъл между диагоналите. От форулата за лице $S=\dfrac{d_1d_2\sin\varphi}{2}$ намираме $\sin\varphi=\dfrac{12}{13}$, откъдето $\cos\varphi=\dfrac{5}{13}$. За по-малката страна имаме
$b^2=\left(\dfrac{d_1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{d_2}{2}\right)^2-2\cdot\dfrac{d_1}{2}\cdot\dfrac{d_2}{2}\cdot\cos\varphi=144$, а за по-голямата —
$a^2=\left(\dfrac{d_1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{d_2}{2}\right)^2+2\cdot\dfrac{d_1}{2}\cdot\dfrac{d_2}{2}\cdot\cos\varphi=244$. Отговор 12 и $2\sqrt{61}$.

Задача 5. Паролата на електронната поща на Мечо Пух е образувана чрез разместване на буквите в думата „ПОЖАРНИКАРКА“. В паролата между съгласните букви няма гласни букви. Какъв е броят на паролите, отговарящи на тези правила? Отговорът да се представи като произведение на цели положителни степени на различни прости числа.

Решение. Броят на наредбите на съгласните букви Ж, К, К, Н, П, Р, Р в дадената дума е $7!$, различните са $\dfrac{7!}{2!2!}=2.3.5.6.7$ (разместването на двете „К“ или на двете „Р“ дава същата подредба).

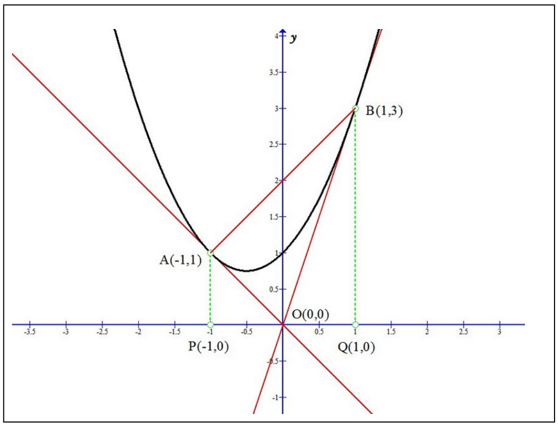
Броят на наредбите на гласните букви А, А, А, И, О в думата е $5!$, различните са $\frac{5!}{3!} = 4.5$ (разместването на трите „А“ дава същата подредба). Всяка от различните наредби на съгласните може да бъде поставена на 6 различни места във всяка от различните наредби на гласните. Следователно, търсеният брой е $(2.3.5.6.7).(4.5).6 = 2^5.3^3.5^2.7$.

Задача 6. Да се реши уравнението:

$$\log_3\left(25^x + 4.5^x - 5\right) = \log_5\left(1 + 5^{1-x}\right) + \log_5\left(25^x - 5^x\right) \quad .$$

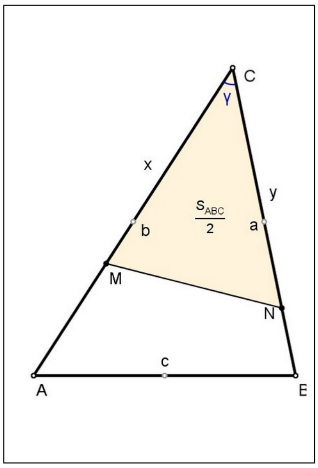
Решение. С полагане $y = 5^x$ задачата се свежда до намиране на положителните корени на уравнението $\log_3\left(y^2 + 4y - 5\right) = \log_5\left(\frac{y+5}{y}\right) + \log_5\left(y^2 - y\right)$. Допустимите стойности удовлетворяват неравенствата $y^2 + 4y - 5 > 0$, $\frac{y+5}{y} > 0$ и $y^2 - y > 0$ с общо решение $y > 1$. При тези стойности на y уравнението е еквивалетно на $\log_3\left(y^2 + 4y - 5\right) = \log_5\left(y^2 + 4y - 5\right)$ и на $(\log_3 5 - 1)\log_3\left(y^2 + 4y - 5\right) = 0$, или $\log_3\left(y^2 + 4y - 5\right) = 0$, откъдето $y^2 + 4y - 5 = 1$ с единствен корен, по-голям от 1, $\sqrt{10} - 2$. Отговор: $\log_5\left(\sqrt{10} - 2\right)$.

Задача 7. През началото $O(0,\, 0)$ на координатната система са прекарани двете допирателни към параболата $y = x^2 + x + 1$. Ако A и B са допирните точки, да се намери лицето на триъгълника OAB .



Решение. Допирателната към дадената парабола в точка $\left(u,\, u^2 + u + 1\right)$ има уравнение $y = (2u+1)(x-u) + u^2 + u + 1$. Тази права минава през $O(0,\, 0)$ тогава и само тогава, когато $0 = (2u+1)(-u) + u^2 + u + 1$. Последното уравнение има корени -1 и 1. Следователно, допирните точки са $A(-1,\, 1)$ и $B(1,\, 3)$. За търсеното лице имаме $S_{OAB} = S_{QBAP} - S_{OQB} - S_{OPA} = \frac{(1+3).2}{2} - \frac{1.3}{2} - \frac{1.1}{2} = 2$.

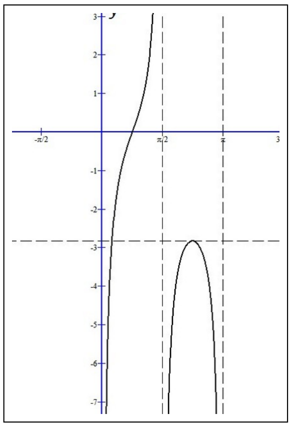
Задача 8. Страните на триъгълника $\triangle ABC$ са $AB = 10$, $BC = 12$, $AC = 14$. Точката M лежи на страната AC, а точката N лежи на страната BC (M или N може да съвпада с връх на $\triangle ABC$) като MN разделя $\triangle ABC$ на две фигури с равни лица. Да се намерят най-малката и най-голямата възможна дължина на MN .



Решение. Нека $CM = x$ и $CN = y$. Тогава $S_{CMN} = \frac{x\,y\sin\gamma}{2} = \frac{S_{ABC}}{2} = \frac{a\,b\sin\gamma}{4}$, т.е. $x\,y = \frac{a\,b}{2}$. От друга страна $MN^2 = x^2 + y^2 - 2\,x\,y\cos\gamma$, или $MN^2 = x^2 + y^2 + \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2} = \left(x - \frac{a\,b}{2\,x}\right)^2 + \frac{c^2 - (a-b)^2}{2}$. Понеже $x \le b$, $y \le a$ и $x\,y = \frac{a\,b}{2}$, то $\frac{b}{2} \le x \le b$. При $p > 0$ функцията $u - \frac{p}{u}$ е строго растяща за $u > 0$, следователно $t = \left(x - \frac{a\,b}{2\,x}\right) \in \left[\frac{b}{2} - a\,, b - \frac{a}{2}\right]$. По условие $\frac{b}{2} - a = -5$, $b - \frac{a}{2} = 8$ и $\frac{c^2 - (a-b)^2}{2} = 48$, значи $MN^2 = t^2 + 48$ достига най-малка стойност 48 за $t = 0$, т.е. $CM = CN = 2\sqrt{21}$, и най-голяма стойност 112 за $t = 8$, т.е. когато N е средата на BC, а M съвпада с A. Отговор: $4\sqrt{3}$ и $4\sqrt{7}$.

Задача 9. Да се намерят стойностите на параметъра a, за които уравнението $a\sin x\cos x = \sin x - \cos x$ има точно два различни корена в интервала $[0,\, \pi]$.

Решение. 0, $\dfrac{\pi}{2}$ и π не са решения на уравнението за никоя стойност на a. Преобразуваме го във вида $f(x) = \dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{1}{\sin x} = a$. В интервала $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ функцията $\cos x$ строго намалява и $\cos x > 0$, откъдето $\dfrac{1}{\cos x}$ строго расте; в интервала $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ функцията $\sin x$ строго расте и $\sin x > 0$, откъдето $\dfrac{-1}{\sin x}$ строго расте. Следователно, $f(x)$ строго расте в $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Понеже $\lim\limits_{x\to 0,\, x>0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to \pi/2,\, x<\pi/2} f(x) = +\infty$ и $f(x)$ е непрекъсната, то уравнението има точно едно решение в $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ за всяко a. Следователно, търсим стойностите на a, за които уравнението има точно едно решение в



$\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$. Имаме $f(x) = f\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)$, което означава, че само $\dfrac{3\pi}{4}$ е възможна стойност на единственото решение, откъдето намираме $a = -2\sqrt{2}$.

Задача 10. Точката M лежи на страната CD на квадрат $ABCD$, като $DM = 2MC$. Окръжността, минаваща през M, върха D и средата N на отсечката BM, пресича AM в точка P. Да се намери отношението $AP : PM$.

Решение. Нека страната квадрата е $3a$, тогава $DM = 2a$. Ако дадената окръжност пресича AD в точка K, то KM е диаметър, значи $\measuredangle KNM = 90^\circ$. Понеже $MN = NB$, то $MK = BK$. Ако $AK = x$, Питагоровата теорема ни дава $(3a)^2 + x^2 = AB^2 + AK^2 = BK^2 = MK^2 = MD^2 + DK^2 = (2a)^2 + (3a - x)^2$, или $x = \dfrac{2a}{3}$. От теоремата за секущите през обща точка намираме $AP.AM = AK.AD = 2a^2$. От друга страна, $AM^2 = AD^2 + DM^2 = 13a^2$, откъдето $\dfrac{AP}{AM} = \dfrac{AP.AM}{AM^2} = \dfrac{2a^2}{13a^2} = \dfrac{2}{13}$, т.е. $AP : PM = 2 : 11$.