Софийски Университет „Св. Климент Охридски"
Писмен конкурсен изпит по математика
7 юли 2012 г.

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ – ТЕМА 2

Задача 1. Да се реши уравнението $4^x - \frac{5}{2}.2^x + 1 = 0$.

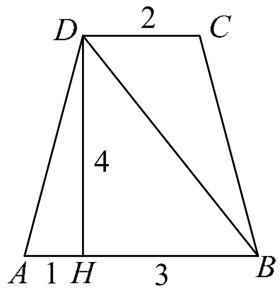
Решение: Полагаме $t = 2^x > 0$ и получаваме $2t^2 - 5t + 2 = 0$, чиито корени са $t_1 = 2, t_2 = \frac{1}{2}$.

Следователно $2^x = 2$, т.е. $x = 1$, или $2^x = \frac{1}{2}$, т.е. $x = -1$.

Задача 2. Нека $a_1, a_2, a_3, ..., a_7$ е геометрична прогресия, за която $a_4 + a_5 + a_6 = 35$ и $a_5 + a_6 + a_7 = 70$. Да се намери a_7.

Решение: Нека q е частното на прогресията. От $a_4 + a_5 + a_6 = 35$ и $a_5 + a_6 + a_7 = 70$ получаваме $a_4\left(1 + q + q^2\right) = 35$ и $a_4 q\left(1 + q + q^2\right) = 70$. Оттук $q = 2$ и $a_4 = 5$. Тогава $a_7 = a_4 q^3 = 5.2^3 = 40$.

Задача 3. Даден е равнобедрен трапец $ABCD$ с основи AB и CD, $AB = 2CD$, височина 4 и лице 12. Да се намери диагонала на трапеца.



Решение: Нека $CD = x$ и $AB = 2x$. Тогава за лицето на трапеца имаме $12 = \frac{2x + x}{2}4$, откъдето намираме $x = 2$. Следователно $AB = 4$ и $CD = 2$.
Ако DH е височина в трапеца, $AH = \frac{4-2}{2} = 1, BH = 3$ и от правоъгълния триъгълник BHD намираме $BD = \sqrt{HD^2 + HB^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$.

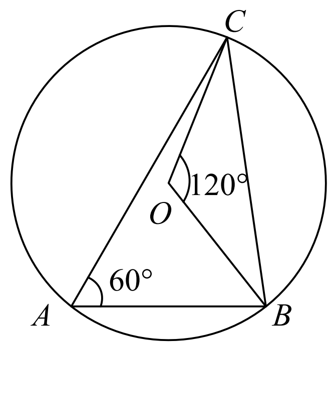
Задача 4. Да се реши неравенството $\frac{2}{x+1} + \frac{3x-1}{(x+1)(x+3)} \le 5$.

Решение: Областта на допустимите стойности е $x \ne -1$ и $x \ne -3$. В нея неравенството е еквивалентно на

$$\frac{2(x+3) + 3x - 1}{(x+1)(x+3)} \le 5 \Leftrightarrow \frac{5(x+1)}{(x+1)(x+3)} \le 5 \Leftrightarrow \frac{x+1}{(x+1)(x+3)} \le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+3} \le 1 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x+3} \ge 0.$$

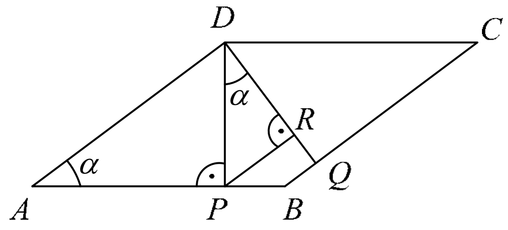
Решенията на последното неравенство са $x \in (-\infty; -3) \cup [-2; \infty)$. Като вземем предвид допустимите стойности на даденото неравенство, получаваме $x \in (-\infty; -3) \cup [-2; -1) \cup (-1; \infty)$.

Задача 5. Даден е триъгълник ABC със страна $AB = 3$, $\sphericalangle BAC = 60^\circ$ и радиус на описаната окръжност $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$. Да се намерят другите две страни и лицето на триъгълника.



Решение: Нека O е центъра на описаната окръжност. Тогава $\sphericalangle BOC = 120^\circ$. От синусовата теорема за триъгълника $\triangle OBC$ получаваме $\frac{BC}{\sin 120^\circ} = \frac{R}{\sin 30^\circ}$, т.е. $\frac{2BC}{\sqrt{3}} = \frac{2.7\sqrt{3}}{3}$, откъдето $BC = 7$.
По косинусовата теорема за $\triangle ABC$ имаме $7^2 = 3^2 + AC^2 - 2.3.AC.\cos 60^0$ или $AC^2 - 3AC - 40 = 0$. Следователно $AC = 8$. Оттук намираме $S = \frac{1}{2}.3.8.\sin 60^\circ = 6\sqrt{3}$.

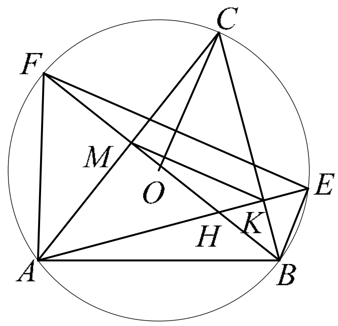
Задача 6. В успоредника $ABCD$ са построени височините DP, ($P \in AB$) и DQ, ($Q \in BC$). Да се намери разстоянието от точката P до правата DQ, ако $AD = 8$ и $DP = 5$.



Решение: Търсим дължината на отсечката PR, където R е такава точка от DQ, че $PR \perp DQ$. Понеже $AD \parallel BC$, то $\sphericalangle ADQ = 90^o$. Тогава $\sphericalangle PAD = 90^o - \sphericalangle PDA = \sphericalangle PDQ$. Оттук $\triangle PAD \sim \triangle RDP$. Следователно $\frac{PR}{PD} = \frac{DP}{DA}$, т.е. $\frac{PR}{5} = \frac{5}{8}$.

Следователно $PR = \frac{25}{8}$.

Задача 7. Остроъгълният триъгълник ABC е вписан в окръжност k с център O. Височините AK ($K \in BC$) и BM ($M \in AC$) на триъгълника пресичат k съответно в точките E и F. Да се намери ъгълът между MK и CO, както и дължината на EF, ако $MK = 3$.



Решение: Да означим с H пресечната точка на AK и BM. Тъй като $\sphericalangle CAE = 90^o - \sphericalangle ACB = \sphericalangle CBF$, то $\overset{\frown}{CF} = \overset{\frown}{CE}$ и следователно $\sphericalangle FAM = \sphericalangle HAM$. Като вземем пред вид още, че правоъгълните триъгълници AMF и AMH имат общ катет, получаваме, че те са еднакви. Ето защо $FM=MH$. Аналогично се доказва, че $EK=KH$. От последните две равенства следва, че KM е средна отсечка в ΔEFH. Понеже C е средата на дъгата $\overset{\frown}{ECF}$, то $OC \perp EF$. От това, че KM е средна отсечка в ΔEFH следва, че $KM \parallel EF$. Ето защо $OC \perp MK$. Тъй като MK е средна отсечка то $EF = 2KM = 6$.

Задача 8. Да се намерят всички стойности на параметъра a, при които уравнението $2ax - 3\sqrt{x} + \frac{a-8}{8} = 0$ има точно две различни реални решения.

Решение: Полагаме $y = \sqrt{x} \geq 0$ ($x \geq 0$) и получаваме уравнението $2ay^2 - 3y + \frac{a-8}{8} = 0$ (1). Задачата се свежда до намиране на всички стойности на параметъра a, при които уравнението (1) има два различни неотрицателни корена. При $a = 0$ получаваме $y = -\frac{1}{3} < 0$. Дискриминантата на (1) е $D = 9 - a^2 + 8a$. Тъй като корените на $9 - a^2 + 8a = 0$ са $a_1 = -1$ и $a_2 = 9$, то $D > 0$ за $-1 < a < 9$. Уравнението (1) има два различни неотрицателни корена, когато тяхната сума и тяхното произведение са неотрицателни, т.е. $\frac{3}{2a} \geq 0$ и $\frac{a-8}{16a} \geq 0$. От първото неравенство следва, че $a > 0$. Тогава от второто неравенство намираме $a \geq 8$. Окончателно решението на задачата е: $8 \leq a < 9$.

Пълното решение на всяка задача се оценява с 5 точки. Оценката се получава по формулата 2 + 0,1.N, където N е броят на получените точки.