СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА I

23 юни 2013 г.

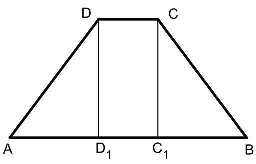
Тема №1.

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

Задача 1. Да се реши уравнението $\dfrac{2}{3+x}+\dfrac{3}{2+x}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{2}$.

Решение: Даденото дробно уравнение има смисъл при $x\neq -2$ и $x\neq -3$. Последователно имаме $\dfrac{2}{3+x}+\dfrac{3}{2+x}=\dfrac{13}{6}$, $\dfrac{6.2.(2+x)+6.3.(3+x)-13.(2+x)(3+x)}{6(3+x)(2+x)}=0$, а след освобождаване от знаменателя и $13x^2+35x=0$, т.е. $x_1=0$ или $x_2=-\dfrac{35}{13}$, за които дробното уравнение има смисъл. Така получихме, че $x_1=0$, $x_2=-\dfrac{35}{13}$ са решения на задачата.

Задача 2. В окръжност k е вписан трапец $ABCD$ с основи $AB=8$ и $CD=2$. Да се намерят дължините на бедрата (AD и BC) и лицето S на трапеца при условие, че в него може да се впише окръжност.

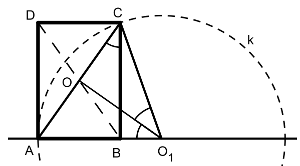


Решение: Понеже трапецът е описан около окръжност, то имаме $AB+CD=AD+BC$. Така от факта, че той е вписан в окръжност следва, че той е равнобедрен и $AD=BC=(AB+CD)/2=5$. Нека CC_1 и DD_1 са височини на трапеца, тогава $\Delta AD_1D\cong\Delta BC_1C$ и фигурата D_1C_1CD е правоъгълник, т.е. $D_1C_1=CD=2$ и $AD_1=BC_1=(AB-CD)/2=3$. Сега от теоремата на Питагор за ΔAD_1D получаваме $DD_1=\sqrt{AD^2-AD_1^2}=4$. Така за лицето на трапеца имаме $S=(AB+CD)DD_1/2=20$.

Задача 3. Да се намери реалното число x при условие, че числата $\lg 2$, $\lg(2^x-1)$ и $\lg(2^x+3)$ в този ред образуват аритметична прогресия.

Решение: Изразите, записани под знака за логаритъм, имат смисъл при $2^x>1=2^0$, т.е. при $x>0$. От условието имаме $\lg 2+\lg(2^x+3)=2\ \lg(2^x-1)$, $\lg 2(2^x+3)=\lg(2^x-1)^2$ или $2(2^x+3)=(2^x-1)^2$. След въвеждане на ново неизвестно $y=2^x>0$ получаваме $2(y+3)=(y-1)^2$, $y^2-4y-5=0$ или $y_1=-1$, $y_2=5$. Понеже $y=2^x>0$, то единственото решение на $2(y+3)=(y-1)^2$ е $y_2=5$. Връщаме се към неизвестното x и получаваме $2^x=5$ или $x=\log_2 5$, което е решение на задачата, понеже $2^x=5>1$.

Задача 4. Даден е правоъгълник $ABCD$ със страни $AB=1$ и $BC=\sqrt{2}$. Окръжност k с център O_1, лежащ върху правата AB минава през върховете A и C. Да се намерят дължината на радиуса R на окръжността и $\sin\sphericalangle AO_1C$.



Решение: Центърът O_1 на окръжността k е пресечна точка на правата AB и симетралата OO_1 на отсечката AC. Нека $O_1A=O_1C=R$. По условие имаме $AB<BC$, а $BC<R=O_1C$ (O_1C е хипотенуза в ΔO_1BC), следователно $R=O_1A>AB$, т.е. точката B е между A и O_1 или $O_1B=O_1A-AB=R-1$. Сега от теоремата на Питагор за ΔO_1BC получаваме $(R-1)^2+(\sqrt{2})^2=R^2$ или $R=\dfrac{3}{2}$. Нека означим $\varphi=\sphericalangle ACB$, тогава $\sphericalangle BAC=90^\circ-\varphi$ и $\sphericalangle AO_1O=\varphi$, но в ΔACO_1 отсечката OO_1 е височина и медиана, т.е. е и ъглополовяща и $\sphericalangle AO_1C=2\varphi$. От равнобедрения ΔBCO имаме още $\sphericalangle OBC=\varphi$, а за ъгъла $\sphericalangle AOB$, който е външен за този триъгълник– $\theta=\sphericalangle AOB=2\varphi=\sphericalangle AO_1C$. Така от формулата за лице на правоъгълник получаваме $S=AB.BC=\dfrac{AC.BD.\sin 2\varphi}{2}$ или $\sin AO_1C=\sin 2\varphi=\dfrac{2.AB.BC}{AC.BD}=\dfrac{2.AB.BC}{AB^2+BC^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, понеже $AC.BD=AC^2=AB^2+BC^2$.

Задача 5. Реалните числа x_1 и x_2 са корени на уравнението $x^2-ax-5a=0$, където $a\in\mathbb{R}$. Да се намери a при условие, че числата $y_1=x_1^2+x_1x_2$ и $y_2=x_2^2+x_1x_2$ са корени на уравнението $y^2-9y-135=0$.

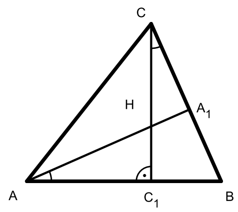
Решение: По формулите на Виет за уравнението $x^2-ax-5a=0$ имаме $x_1+x_2=a, x_1x_2=-5a$. Понеже числата y_1 и y_2 са корени на уравнението $y^2-9y-135=0$, то получаваме

$y_1 + y_2 = 9, y_1\, y_2 = -135$. Замествайки $y_1 = x_1^2 + x_1 x_2$ и $y_2 = x_2^2 + x_1 x_2$ в равенството $y_1 + y_2 = 9$, достигаме до $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 = 9$ или $|a| = 3$, т.е. възможни решения са $a = 3$ или $a = -3$. След проверка се оказва, че при $a = 3$ корените на $x^2 - 3x - 15 = 0$ са реални, а при $a = -3$ уравнението $x^2 + 3x + 15 = 0$ няма реални корени. От друга страна от равенството $y_1\, y_2 = -135$ и $y_1 = x_1(x_1+x_2)$, $y_2 = x_2(x_1+x_2)$ получаваме $y_1\, y_2 = x_1x_2(x_1+x_2)^2 = -5a^3 = -135$, което е вярно при $a = 3$ (и не е вярно при $a = -3$), т.е. само $a = 3$ е решение на задачата.

Задача 6. С помощта на цифрите 1, 2, 3, 4 и 5 са съставени всички възможни петцифрени числа (без повторение на цифри). Тези числа са подредени по големина и са записани последователно едно до друго от най-малкото към най-голямото $1234512354 \cdots 54321$. Да се намери броят на всички записани цифри и да се определи коя цифра стои на 237 място.

Решение: Понеже няма повторение, то всяко от числата съдържа точно цифрите 1, 2, 3, 4 и 5, но в различен ред. Броят на числата е равен на броят на пермутациите от пет елемента $P_5 = 5! = 1.2.3.4.5 = 120$. Всяко от числата има по пет цифри, следователно броят на всички записни цифри е равен на $5.120 = 600$. Понеже $237 : 5 = 47$ ост. 2, то $237^{\text{-та}}$ цифра в редицата е втората цифра на $48^{\text{-то}}$ по ред петцифрено число. Сега да преброим петцифрените числа, които започват с една и съща цифра– променяме местата само на последните им четири цифри и следователно този брой е $P_4 = 4! = 1.2.3.4 = 24$. Така в редицата, описана в условието на задачата има пет групи от по 24 числа (първите 24 петцифрени числа започват с цифрата 1, втората група от 24 числа – с 2 и т.н.). Тъй като $48 = 2.24$, следователно $48^{\text{-то}}$ по ред петцифрено число е последното (най-голямото) от групата от 24 числа, започващи с цифрата 2, т.е. това число е 25431 или втората му цифра ($237^{\text{-та}}$ по ред) е 5.

Задача 7. За остроъгълния триъгълник ABC имаме $AC_1 : C_1B = 4 : 1$, $CH = 5$ и $HC_1 = 4$, където CC_1 е височината към страната AB, а H е ортоцентърът на триъгълника. Да се намерят дължините на страните (AB, BC и CA) и лицето S на триъгълника ABC.



Решение: По условие имаме $CC_1 = CH + HC_1 = 9$ и $AC_1 : C_1B = 4 : 1$ или $AC_1 = 4k$ и $C_1B = k$. Построяваме височината AA_1 към страната BC и означаваме $\sphericalangle ABC = \beta$. Тогава имаме $\sphericalangle BAA_1 = \sphericalangle BCC_1 = 90^\circ - \beta$ и $\Delta AC_1H \sim \Delta CC_1B$, откъдето $\dfrac{AC_1}{CC_1} = \dfrac{C_1H}{C_1B}$, $AC_1.C_1B = CC_1.C_1H$ или $4k.k = 9.4$, т.е. $k = 3$, $AC_1 = 12$, $C_1B = 3$ и $AB = AC_1 + C_1B = 15$. Сега за лицето имаме $S = \dfrac{AB.CC_1}{2} = \dfrac{15.9}{2} = \dfrac{135}{2}$, а за страните– $AC = \sqrt{CC_1^2 + AC_1^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$ и $BC = \sqrt{CC_1^2 + C_1B^2} = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}$.

Задача 8. За правоъгълен триъгълник ABC с ъгли α, β и $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$ е в сила равенството $\sin\dfrac{\alpha}{2} + \cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \sin\dfrac{\beta}{2} + \cos^2\dfrac{\beta}{2}$. Да се намерят големините на ъглите α и β. Отговорът да се обоснове!

Решение: По условие имаме $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$. Прехвърляме всичко от едната страна на даденото равенство и получаваме
$0 = \left(\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\right) + \left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\beta}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{4}\cos\frac{\alpha+\beta}{4} + \left(\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\beta}{2}\right) =$
$= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{4}\cos\frac{\alpha+\beta}{4} - 2\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{4}\ 2\sin\frac{\alpha-\beta}{4}\sin\frac{\alpha+\beta}{4} = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{4}\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\left(1 - 2\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{4}\right) =$
$= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{4}\cos\frac{\pi}{8}\left(1 - 2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\alpha-\beta}{4}\right) = 0$, т.е. $\sin\frac{\alpha-\beta}{4} = 0$ или $1 - 2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\alpha-\beta}{4} = 0$. Нека допуснем, че $1 - 2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\alpha-\beta}{4} = 0$, т.е. $\cos\frac{\alpha-\beta}{4} = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{8}}$. Функцията $\sin x$ е растяща в интервала $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, следователно $0 < \sin\frac{\pi}{8} < \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ или $\dfrac{1}{2\sin\frac{\pi}{8}} > 1$, така получихме, че $\cos\frac{\alpha-\beta}{4} = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{8}} > 1$, което е противоречие, показващо, че нашето допускане е грешно и $1 - 2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\alpha-\beta}{4} \neq 0$. Ако $\sin\frac{\alpha-\beta}{4} = 0$, то $\frac{\alpha-\beta}{4} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, откъдето понеже α и β са ъгли на триъгълник следва, че $\alpha = \beta = \dfrac{\pi}{4}$.